<u>Ministerul Educației, Cercetării și Inovării</u>

<u>Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar</u>

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.

Filiera tehnologică: profilul servicii, specializarea toate calificările profesionale; profilul resurse, specializarea toate calificările profesionale; profilul tehnic, specializarea toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $2\log_3 4 - 4\log_3 2$.

5p **2.** Să se determine soluțiile reale ale ecuației $2^{x-1} + 2^x = 12$.

5p **3.** Să se determine numărul natural *n*, $n \geq 1$ știind că $A_n^1 + C_n^1 = 10$.

5p **4.** Fie funcția $f:[0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 3$. Să se determine mulțimea valorilor funcției f.

5p **5.** Se consideră triunghiul echilateral ABC înscris într-un cerc de centru *O*. Să se arate că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O}$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin 135°$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine numerele a, b şi c astfel încât $A + F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se arate că pentru $a = c = 0$ şi $b = -1$ matricea A este inversa matricei F.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $F \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, unde $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x * y = 2xy - x - y + 1$.

5p **a)** Să se arate că $x * y = xy + (1 - x)(1 - y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x * (1 - x) = 0$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se arate că $f'(x)=\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Știind că $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, să se determine

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)+g\left(x^2\right)+g\left(x^3\right)+\ldots+g\left(x^{2009}\right)+x^{2010}}{x^{2009}}.$$

2. Se consideră $I_n=\int_e^{e^2} x\ln^n x\,dx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se calculeze I_0.

5p **b)** Să se arate că $I_n\le I_{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Să se demonstreze că are loc relația $I_n=\dfrac{e^2\left(e^2\cdot 2^n-1\right)}{2}-\dfrac{n}{2}I_{n-1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.