

Definiție 1. Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \in D$ un punct de acumulare pentru D .

a) Spunem că funcția f admite derivată în punctul a , dacă există în $\bar{\mathbb{R}}$, limita

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a). \text{ Elementul } f'(a) \in \bar{\mathbb{R}} \text{ se numește } \textbf{derivata} \text{ funcției } f \text{ în punctul } a.$$

b) Spunem că funcția f este **derivabilă** în punctul a , dacă există și este finită derivata $f'(a)$.

Definiție 2. Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că funcția f este derivabilă pe o mulțime $A \subset D$, dacă este derivabilă în fiecare punct $a \in A$. Dacă o funcție este derivabilă pe tot domeniul de definiție D , se spune mai simplu că f este derivabilă.

Teoremă. Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Definiție 3. Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \in D$, un punct de acumulare pentru $D \cap (-\infty; a)$ (respectiv pentru $D \cap (a; +\infty)$).

a) Spunem că funcția f admite derivată la stânga (respectiv la dreapta) în punctul a , dacă există în $\bar{\mathbb{R}}$, limita $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_s(a)$ (respectiv $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a)$);

b) Spunem că funcția f este **derivabilă la stânga** (respectiv **la dreapta**) în punctul a , dacă există și este finită derivata $f'_s(a)$ (respectiv $f'_d(a)$).

Observație:

Dacă domeniul de definiție al funcției este $D = [\alpha; \beta]$, atunci problema derivatei are sens în orice punct al intervalului $(\alpha; \beta)$; în punctul α are sens problema derivatei la dreapta, iar în punctul β are sens problema derivatei la stânga.

Teoremă. Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \in D$, un punct de acumulare pentru D .

a) Funcția f are derivată în punctul a dacă și numai dacă $f'_s(a), f'_d(a)$ există în $\bar{\mathbb{R}}$ și $f'_s(a) = f'_d(a)$.

b) Funcția f este derivabilă în punctul a dacă și numai dacă $f'_s(a), f'_d(a)$ există, sunt finite și $f'_s(a) = f'_d(a)$.

Observații (interpretare geometrică a derivatei într-un punct):

Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}, a \in D$, un punct de acumulare pentru D .

1. dacă f este derivabilă în punctul a , graficul funcției admite tangentă în punctul $M(a; f(a))$ de ecuație:

$$t: y - y_M = m_t(x - x_M); \text{ unde } x_M = a; y_M = f(a) \text{ și } m_t = f'(a).$$

2. dacă funcția f este continuă în punctul a și $f'_s(a) = +\infty, f'_d(a) = -\infty$ (sau invers), atunci punctul a se numește **punct de întoarcere**.

3. dacă funcția f este continuă în punctul a și $f'_s(a), f'_d(a)$ există, cel puțin una fiind finită, dar f nu este derivabilă în a , atunci punctul a se numește **punct unghiular**.

Exerciții rezolvate

1. Studiați continuitatea și derivabilitatea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 2 \\ 6x - 4, & x > 2 \end{cases}$, în punctul $a = 2$.

Clasa XI – M2 – prof. Cornelia Mestecan**Fișă de lucru – Derivata unei funcții într-un punct. Funcții derivabile**

Rezolvare:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x^2 + 2x) = 4 + 4 = 8 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (6x - 4) = 12 - 4 = 8 \\ f(2) &= 4 + 4 = 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ este continuă în } a = 2$$

$$\left. \begin{aligned} f'_s(2) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{(x - 2) \cdot (x + 4)}{x - 2} = 6 \\ f'_d(2) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{6x - 4 - 8}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{6(x - 2)}{x - 2} = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_s(2) = f'_d(2) \text{ deci } f \text{ este derivabilă în } a = 2.$$

Observație: am descompus trinomul $x^2 + 2x - 8$ în produs de factori utilizând $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ unde x_1, x_2 sunt soluțiile reale ale ecuației $ax^2 + bx + c = 0$

$$x^2 + 2x - 8 = 0, \quad a = 1; b = 2; c = -8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) \Leftrightarrow \Delta = 36$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x_1 = \frac{-2 - 6}{2} = -4; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x_2 = \frac{-2 + 6}{2} = 2$$

Prin urmare

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = (x - (-4))(x - 2) = (x + 4)(x - 2)$$

$$2.. \text{ Studiați continuitatea și derivabilitatea funcției } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -5x + 2, & x < 1 \\ -3, & x = 1 \\ 3x - 6, & x > 1 \end{cases}, \text{ în punctul } a = 1.$$

Rezolvare:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (-5x + 2) = -5 + 2 = -3 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (3x - 6) = 3 - 6 = -3 \\ f(1) &\stackrel{def}{=} -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ este continuă în } a = 1$$

$$\left. \begin{aligned} f'_s(1) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{-5x + 2 - (-3)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{-5(x - 1)}{x - 1} = -5 \\ f'_d(1) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{3x - 6 - (-3)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{3(x - 1)}{x - 1} = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_s(1) \neq f'_d(1), \text{ deci } f \text{ nu este}$$

derivabilă în $a = 1$, spunem în acest caz că $a = 1$ este punct unghiular sau $M(1; -3)$ este punct unghiular pentru graficul funcției f .

3. Studiați continuitatea și derivabilitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x+1}, & x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$, în punctul $a=1$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sqrt{-x+1} = \sqrt{0} = 0 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt{x-1} = 0 \\ f(1) &= \sqrt{1-1} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ este continuă în } a=1$$

$$\left. \begin{aligned} f'_s(1) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\sqrt{-x+1} - 0}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\sqrt{-x+1}}{-(\sqrt{-x+1})^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{-\sqrt{-x+1}} = \frac{1}{-\sqrt{0^+}} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ f'_d(1) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{0^+}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_s(1),$$

$f'_d(1)$ infinite deci f nu este derivabilă în $a=1$, spunem în acest caz că $a=1$ este punct de întoarcere sau $M(1;0)$ este punct de întoarcere al graficului funcției f .

4. Arătați că funcția $f: [-4; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+4}$ este derivabilă în punctul $a=0$ și nu este derivabilă în $a=-4$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2) \cdot (\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{4} < \infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

f este derivabilă în $a=0$

$$\left. \begin{aligned} f'_d(-4) &= \lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x > -4}} \frac{f(x) - f(-4)}{x+4} = \lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x > -4}} \frac{\sqrt{x+4} - 0}{x+4} \stackrel{0}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x > -4}} \frac{\sqrt{x+4}}{(\sqrt{x+4})^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x > -4}} \frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ nu este}$$

derivabilă în $a=-4$.

5. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției: $f: [-4; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+4}$ în punctul $M(0;2)$.

Rezolvare: știm că dacă f este derivabilă în punctul a , graficul funcției admite tangentă în punctul $M(a; f(a))$ de ecuație: $t: y - y_M = m_t(x - x_M)$; unde $x_M = a$; $y_M = f(a)$ și $m_t = f'(a)$.

Funcția noastră este derivabilă în $a=0$ (conform ex. 2.), deci graficul funcției admite tangentă în punctul $M(0;2)$

$$t: y - y_M = m_t(x - x_M); \text{ unde } x_M = 0; y_M = f(0) = 2; m_t = f'(0) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Deci } t: y - y_M = m_t(x - x_M) \Leftrightarrow t: y - 2 = \frac{1}{4}(x - 0) \Leftrightarrow t: y - 2 = \frac{1}{4}x \Leftrightarrow t: y = \frac{1}{4}x + 2.$$

Clasa XI – M2 – prof. Cornelia Mestecan**Fișă de lucru – Derivata unei funcții într-un punct. Funcții derivabile**

6. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ în punctul $a = 2$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x + 1 - (2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x + 1 - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2) \left(x + \frac{1}{2} \right)}{x - 2} = 2 \cdot \left(2 + \frac{1}{2} \right) = 5 = f'(2) \end{aligned}$$

Am folosit: $2x^2 - 3x - 2 = 0$; $a = 2; b = -3; c = -2$; $\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = 25$;

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x_1 = \frac{-(-3) - 5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x_2 = \frac{-(-3) + 5}{4} = 2$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 2 \left(x - \left(-\frac{1}{2} \right) \right) (x - 2) = 2 \left(x + \frac{1}{2} \right) (x - 2)$$

$f'(2)$ nr. finit, deci f este derivabilă în $a = 2$, prin urmare graficul funcției admite tangentă în punctul $M(a; f(a))$ de ecuație: $t: y - y_M = m_t(x - x_M)$; unde $x_M = a$; $y_M = f(a)$ și $m_t = f'(a)$.

$$M(a; f(a)) = M(2; 3), x_M = 2, y_M = f(2) = 3, m_t = f'(2) = 5$$

Ecuația tangentei este: $t: y - y_M = m_t(x - x_M) \Leftrightarrow t: y - 3 = 5(x - 2) \Leftrightarrow t: y = 5x - 7$

Exerciții propuse

1. Studiați continuitatea și derivabilitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x, & x \leq 3 \\ -2x + 9, & x > 3 \end{cases}$, în punctul $a = 3$.

2. Studiați continuitatea și derivabilitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -5x - 3, & x < 0 \\ 3x - 3, & x \geq 0 \end{cases}$, în punctul $a = 0$.

3. Studiați continuitatea și derivabilitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x+3}, & x < 3 \\ \sqrt{x-3}, & x \geq 3 \end{cases}$, în punctul $a = 3$.

4. Arătați că funcția $f: [5; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-5}$ este derivabilă în punctul $a = 9$ și nu este derivabilă în $a = 5$.

5. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției: $f: [5; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-5}$ în punctul $M(9; 2)$.

6. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 3x - 4$ în punctul $a = 2$.