

Clasa a XI-a – M2 – prof. Cornelia Mestecan

Fișă de lucru – Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor

Rolul derivatei a doua în studiul funcției: convexitate / concavitate, puncte de inflexiune

Definiție 1:

Funcția derivabilă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **convexă** pe I dacă tangenta în orice punct al graficului se află sub grafic și se numește **concavă** pe I dacă tangenta în orice punct al graficului se află deasupra acestuia.

Teoremă

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă. Atunci:

- 1) f este convexă pe I dacă și numai dacă $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$;
- 2) f este concavă pe I dacă și numai dacă $f''(x) \leq 0, \forall x \in I$.

Pașii ce se urmează:

- a) se calculează derivata a doua f''
- b) se rezolvă ecuația $f''(x) = 0$
- c) se determină intervalele pe care derivata a doua păstrează același semn
- d) după cum semnul derivatei a doua este “+” sau “-”, se stabilește că funcția este convexă sau concavă pe aceste intervale.

Obs. -dacă derivata a doua f'' are semne diferite de o parte și de alta a unui punct x_0 din I și dacă f este continuă în x_0 , atunci x_0 se numește **punct de inflexiune**.

-derivata a doua este utilă și la determinarea naturii unui punct critic a (adică rădăcină a derivatei întâi) al unei funcții $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de două ori derivabile:

- dacă $f''(a) > 0$, atunci a este punct de minim local
- dacă $f''(a) < 0$, atunci a este punct de maxim local

Exemple:

- 1) Determinați intervalele de convexitate pentru $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2$

Rezolvare: $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f''(x) = 6x - 6$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	- - - - -	- 0 + + + + +	
$f(x)$		-2	
	Concavă	i	Convexă

Concluzii:

$x = 2$ este punct de inflexiune

pentru $x \in (-\infty; 1]$ funcția f este concavă iar pentru $x \in [1; +\infty)$ funcția f este convexă.

- 2) Determinați punctele de extrem și punctele de inflexiune, respectiv monotonia, convexitatea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x + 2$

Rezolvare: $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1' = -1; x_2' = 1$

$$f''(x) = 6x; \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Rightarrow x_1'' = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Clasa a XI-a – M2 – prof. Cornelia Mestecan

Fișă de lucru – Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor

Rolul derivatei a doua în studiul funcției: convexitate / concavitate, puncte de inflexiune

x	$-\infty$	-1				0				1	$+\infty$			
$f'(x)$	+	+	+	+	0	-	-	-	-	0	+	+	+	+
$f''(x)$	-	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		4	$\searrow$		2	$\searrow$		0	$\nearrow$		$+\infty$	
		$\cap$		M	$\cap$		i	$\cup$		m	$\cup$			

Concluzii:

$x_1' = -1$ este punct de maxim; $x_2' = 1$ este punct de minim; $x_1'' = 0$ este punct de inflexiune

Pentru $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ funcția este strict crescătoare

Pentru $x \in (-1; 1)$ funcția este strict descrescătoare

Pentru $x \in (-\infty; 0)$ funcția este concavă iar pentru $x \in (0; +\infty)$ funcția este convexă.

3) Determinați punctele de extrem și punctele de inflexiune, respectiv monotonia, convexitatea funcției $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{x^2}$.

Rezolvare: $f'(x) = \frac{-3x + 4}{x^3}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

$f''(x) = \frac{6x - 12}{x^4}$; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \frac{-2}{+0} = -\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \frac{-2}{+0} = -\infty$;

x	$-\infty$				0				$\frac{4}{3}$				2				$+\infty$			
$f'(x)$	-	-	-	-	-		+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	-	-		
$f''(x)$	-	-	-	-	-		-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+		
$f(x)$	-1	$\searrow$			$-\infty$		$-\infty$	$\nearrow$			$\frac{1}{8}$	$\searrow$		0	$\searrow$		-1			
		$\cap$						$\cap$			M	$\cap$		i	$\cup$					

Exerciții propuse:

1) Stabiliți intervale de convexitate și concavitate și, dacă este cazul, punctele de inflexiune:

a) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 6x^2 - 7$; c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$;

d) $f: \mathbb{R} - \{-1; +1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$; e) $f: (-\infty; -1) \cup (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x^2 + x)$

2) Studiați cu ajutorul derivatei întâi și derivatei a doua funcțiile:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x^2$; b) $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{x-2}$; c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$

d) $f: \mathbb{R} - \{-1; +1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$; e) $f: (-\infty; 0) \cup (2; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \ln(x^2 - 2x)$