

Clasa a XI-a – M2 – prof. Cornelia Mestecan**Fișă de lucru – Regulile lui l'Hôpital****I. Cazul $\frac{0}{0}$** **Teoremă**

Fie I interval, $a \in \bar{\mathbb{R}}$ punct de acumulare al lui I și funcțiile $f, g : I - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă:

$$1. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0; \quad 2. f \text{ și } g \text{ sunt derivabile pe } I - \{a\};$$

$$3. g'(x) \neq 0 \text{ pentru } x \in I - \{a\}; \quad 4. \text{ există } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ în } \bar{\mathbb{R}},$$

$$\text{atunci există } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ și are loc relația } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

II. Cazul $\frac{\infty}{\infty}$ **Teoremă**

Fie I interval, $a \in \bar{\mathbb{R}}$ punct de acumulare al lui I și funcțiile $f, g : I - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă:

$$1. \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty; \quad 2. f \text{ și } g \text{ sunt derivabile pe } I - \{a\};$$

$$3. g'(x) \neq 0 \text{ pentru } x \in I - \{a\}; \quad 4. \text{ există } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ în } \bar{\mathbb{R}},$$

$$\text{atunci există } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ și are loc relația } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Example:

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)'}{(x^2 - x - 2)'} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{2x - 1} = \frac{4}{3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\ln(1 + x + x^2)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(\ln(1 + x + x^2))'} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\frac{(1 + x + x^2)'}{1 + x + x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + x^2}{1 + 2x} = 1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 5}{4x^2 + 7x - 4} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 + 2x + 5)'}{(4x^2 + 7x - 4)'} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 2}{8x + 7} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{xe^x} = 0$$

Clasa a XI-a – M2 – prof. Cornelia Mestecan
Fișă de lucru – Regulile lui l'Hôpital

Exerciții propuse:

Să se calculeze următoarele limite, utilizând regulile lui l'Hôpital:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1};$
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4};$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3-3x+1}{x^3-6x+5};$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x};$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3};$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x};$
7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+x-6};$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x};$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - \ln \cos x}{x^2};$
10. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2};$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x};$
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln x}{x - \ln x};$
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln x)}{x};$
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + e^{2x}}{e^{2x} - e^x};$
15. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\ln(3x-2)}{\ln(2x-1)};$
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x};$
17. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln \sin x}{\ln \sin 2x};$
18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x};$
19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{2x}};$
20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 5x^2 + 6}{x^4 + x^2 + 3x + 2};$
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x};$
22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 3x}{\sin 2x + \sin 4x};$
23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n};$
24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x - 2}{3^x + 5^x - 2};$
25. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - 3^{x+1}}{3x^2 + 5x + 2};$
26. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$