

Clasa a XI-a – M2 – prof. Cornelia Mestecan**Fișă de lucru - Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor****Rolul derivatei întâi în studiul funcției: monotonie, puncte de extrem**

Def. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}, I$ interval, $a \in I$. Punctul a se numește punct de minim relativ (local) al funcției f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(x) \geq f(a), \forall x \in I \cap V$.

Punctul a se numește punct de maxim relativ (local) al funcției f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(x) \leq f(a), \forall x \in I \cap V$.

Punctul a , care este punct de minim relativ sau punct de maxim relativ, se numește punct de extrem relativ (local).

T.1. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Dacă funcția f este monoton crescătoare (respectiv monoton descrescătoare), atunci $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$ (respectiv $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$).

T.2. 1. Dacă $f'(x) > 0, \forall x \in I$ (respectiv $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$), atunci funcția f este strict crescătoare (respectiv monoton crescătoare).

2. Dacă $f'(x) < 0, \forall x \in I$ (respectiv $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$), atunci funcția f este strict descrescătoare (respectiv monoton descrescătoare).

Exemplu:

1. Determinați intervalele de monotonie și punctele de extrem ale funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x + 2$

Rezolvare: - calculăm derivata întâi $f'(x) = 3x^2 - 3$

- ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x_1 = -1, x_2 = 1$

- calculăm limitele funcției în capetele domeniului de definiție

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ și } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- realizăm următorul tabel

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+++++	0	0	+++++
$f(x)$	$-\infty$ ↗	4 M	0 m	↗ $+\infty$

Unde ↗ semnifică f strict crescătoare și ↘ semnifică f strict descrescătoare, adică f strict crescătoare pe $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ și f strict descrescătoare pe $(-1; 1)$.

M – valoare maximă a lui f în punctul de maxim $x_1 = -1$ al graficului funcției f

m – valoare minimă a lui f în punctul de minim $x_2 = 1$ al graficului funcției f .

2. Determinați intervalele de monotonie și punctele de extrem ale funcției $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Rezolvare: - calculăm derivata întâi $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

- ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x_1 = e$

- calculăm limitele funcției în capetele domeniului de definiție

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty \text{ și } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

- realizăm următorul tabel

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	////////// + + + + + + +	0 - - - - - - - - - -	
$f(x)$	////////// $-\infty$ ↗	$\frac{1}{e}$ M ↘	0

M – valoare maximă a lui f în punctul de maxim $x_1 = e$ al graficului funcției f
 f strict crescătoare pe $(0; e)$ și f strict descrescătoare pe $(e; +\infty)$.

Exerciții propuse:

1. Să se determine intervalele de monotonie ale funcțiilor

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 4x^2$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x^2$; c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - e^x$;

d) $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1-4x}{1-x}$; e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$; f) $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - \ln x$

2. Să se determine punctele de extrem ale funcțiilor:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 5x^2$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2$; c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$;

d) $f: (-\infty; 0) \cup (4; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$; e) $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$

3. Să se determine intervalele de monotonie și punctele de extrem ale funcțiilor:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 27x$; b) $f: \mathbb{R} - \{1; -2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+3}{x^2+x-2}$ c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = -x^2 + 5x$; d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$; e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x^2)$

4. Fie a un număr real fixat și funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - a}$, unde D este domeniul maxim de definiție. Să se determine a astfel încât f să aibă două puncte de extrem local.

5. Să se determine a și b astfel încât funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + ax}{bx + 2}$ să aibă puncte de extrem în $x_1 = -8$ și $x_2 = -4$.

6. Să se determine a și b astfel încât funcția $f(x) = \frac{ax - 2}{x^2 - bx + 1}$ să aibă puncte de extrem în $x_1 = 0$ și $x_2 = 2$. Să se precizeze apoi natura acestor extreme.