CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

Clasa a IX-a

1. Se dă funcţia $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^*-\{1\}$, care satisface egalităţile:

$f(0)=-\frac{1}{2012}$ şi $f(n+503)=\frac{1+f(n)}{1-f(n)}, \forall n\in\mathbb{N}.$

a) Calculaţi $f(503)$ şi $f(1006)$.

b) Demonstraţi că $f(n+1006)=-\frac{1}{f(n)}, \forall n\in\mathbb{N}.$

c) Demonstraţi că f este periodică de perioadă 2012.

Soluţie:

a) Pentru $n=0$, egalitatea din enunţ devine :

$f(503)=\frac{1+f(0)}{1-f(0)}=\frac{2011}{2013}$ 1p

Pentru $n=503$, $f(1006)=\frac{1+f(503)}{1-f(503)}=2012$ 2p

b) $f(n+1006)=f((n+503)+503)=\frac{1+f(n+503)}{1-f(n+503)}=\left(1+\frac{1+f(n)}{1-f(n)}\right):\left(1-\frac{1+f(n)}{1-f(n)}\right)=-\frac{1}{f(n)}$ 2p

c) $f(n+2012)=f((n+1006)+1006)=-\frac{1}{f(n+1006)}=f(n)$ 2p

2. Considerăm progresia aritmetică cu termeni strict pozitivi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $S_n=a_1+a_2+...+a_n$.

Demonstraţi că:

a) $n\cdot(a_k+a_{n-k+1})=2S_n, \forall k\in\{1,2,...,n\}$

b) $\frac{n}{a_k}+\frac{n}{a_{n-k+1}}\le\frac{2S_n}{a_1\cdot a_n}, \forall k\in\{1,2,...,n\}$

c) $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\le\frac{S_n}{a_1\cdot a_n}$.

Soluţie:

a) $a_k=a_1+(k-1)r, k\in N^*, S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$ 1p

$a_k+a_{n-k+1}=2a_1+(n-1)r$ 1p

Verificarea relaţiei 1p

b) Conform a), inegalitatea este echivalentă cu $a_1a_n\le a_ka_{n-k+1}$ 1p

sau încă $0\le(k-1)(n-k)r^2$ 1p

c) Sumând inegalităţile obţinute la b) pentru $k=1,2,..,n$ obţinem $2n\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)\le\frac{2nS_n}{a_1a_n}$

.... 2p

3. Preţul unui litru de FANTA este diferit de preţul unui litru de PRIGAT. Intr-un butoi avem n litri de FANTA , iar în altul avem m litri de PRIGAT. Din primul butoi scoatem 1006 litri de FANTA , iar din al doilea scoatem 1006 litri de PRIGAT. Turnăm cei 1006 litri de FANTA în al doilea butoi şi cei 1006 litri de PRIGAT în primul butoi. După această operaţie, un litru de suc are acelaşi preţ, indiferent de butoiul din care se ia. Determinaţi m şi n , ştiind că $m+n$ are valoarea minimă posibilă.

Soluţie:
Fie x preţul unui litru de FANTA şi y preţul unui litru de PRIGAT 1p

După efectuarea operaţiei , preţul unui litru de suc din primul butoi este $\dfrac{(n-1006)x+1006y}{n}$
.... 1p

iar preţul unui litru de suc din al doilea butoi este $\dfrac{(m-1006)y+1006x}{m}$ 1p

Egalăm aceste preţuri şi obţinem $(x-y)\cdot\left(1-\dfrac{1006}{m}-\dfrac{1006}{n}\right)=0,\ x\neq y$, deci $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{1006}$ 1p

Obţinem: $1006(m+n)=mn\leq\left(\dfrac{m+n}{2}\right)^2$ 1p

Rezultă $m+n\geq 4024$ 1p
În concluzie $(m+n)_{\min}=4024$ şi se obţine pentru $m=n=2012$ litri 1p

4. 1900 de nuci sunt mai scumpe decât 95 de ciocolate, dar mai ieftine decât 96 de ciocolate. Să se demonstreze că o ciocolată şi o nucă (preţul fiecăreia fiind un număr întreg de bani), împreună, costă mai mult de un leu. (Puteţi folosi faptul că dacă $a,b,c,d\in\mathbb{N}$ şi $a>b$, atunci $a\geq b+1$, iar dacă $c<d$, atunci $c\leq d-1$)

Soluţie:
Fie x (bani) preţul unei nuci şi y (bani) preţul unei ciocolate 1p

Obţinem $\begin{cases}1900x>95y\\1900x<96y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}20x>y\\475x<24y\end{cases}$ 1p

Cum $x,y\in\mathbb{N}$ rezultă $\begin{cases}20x\geq y+1\\475x\leq 24y-1\end{cases}$ 2p

Prin urmare, $\begin{cases}1900x\geq 95y+95\\1900x\leq 96y-4\end{cases}$ 1p

$96y-4\geq 95y+95\Rightarrow y\geq 99$ şi apoi $x\geq 5$ 1p
În concluzie $x+y\geq 104$ bani 1p

Notă: Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

Clasa a X-a

1. Se dă numărul complex $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

a) Demonstraţi că $z^2-z+1=0$ şi $z^3+1=0$.

b) Calculaţi $S_k=z^k+\dfrac{1}{z^k}$, $k\in\{1,2,3,4,5,6\}$.

c) Demonstraţi că $P=\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(z^{99}+\dfrac{1}{z^{99}}\right)=2^{33}$.

Soluţie:

a) $z^2-z+1=0$ 1p

$z^3+1=0$ 1p

b) $S_1=1;\ S_2=-1;\ S_3=-2;\ S_4=-1;\ S_5=1;\ S_6=2$ .... $6\times 0{,}5$p

c) $P=\left[1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2\right]^{16}\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-2)$ 1p

$P=2^{33}$ 1p

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, care verifică egalitatea:

$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)-f(xy)+1, \forall x,y\in\mathbb{Z}$ şi $f(1)=2$.

a) Demonstraţi că $f(x+1)=1+f(x), \forall x\in\mathbb{Z}$.

b) Demonstraţi că $f(x+n)=n+f(x), \forall x\in\mathbb{Z}$ şi $\forall n\in\mathbb{N}$.

c) Determinaţi funcţia *f*.

Soluţie:

a) $y=1\Rightarrow f(x+1)=f(x)f(1)-f(x)+1=f(x)+1$ 1p

b) Prin inducţie, după $n\in\mathbb{N}$: $f(x)=f(x)$, adevărat 1p

Presupunem $f(x+n)=n+f(x)$, rezultă $f(x+n+1)=f(x+n)+1=n+1+f(x)$ 1p

c) Din $f(x+1)=f(x)+1, x\in\mathbb{Z}$, $f(1)=2$ rezultă că $f(0)=1$ 1p

Rezultă şi că $f(n+1)=f(n)+1,\ n\in\mathbb{N}$ deci $f(n)=n+1,\ n\in\mathbb{N}$ (inducţie matematică) 1p

Din $f(x)=f(x+n)-n$ rezultă $f(-n)=f(0)-n=1-n, \forall n\in\mathbb{N}$ 1p

În concluzie, $f(m)=m+1,\ m\in\mathbb{Z}$ 1p

3. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{R}$, ecuaţia: $\log_2\left(1+\sqrt{x}\right)=\log_3 x$.

Soluţie:

Se impune $x>0$ 1p

Dacă $\log_3 x=y\Rightarrow x=3^y$ 1p

Ecuaţia devine $\log_2\left(1+\left(\sqrt{3}\right)^y\right)=y$ 1p

Deducem $\left(\frac{1}{2}\right)^y+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y=1$ 1p

Folosind monotonia funcţiei $f(y)=\left(\frac{1}{2}\right)^y+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y, y\in\mathbb{R}$ 1p

Rezultă $y=2$ soluţie unică 1p

Prin urmare soluţia este $x=9$ 1p

4. Într-un plan, relativ la sistemul ortogonal de axe de coordonate, considerăm pătratul *OABC*, unde $O(0,0);A(1,0);B(1,1)$ şi $C(0,1)$. Trei greieri sunt amplasaţi în vârfurile *O, A* şi *C.* La o mişcare un greier sare în poziţia simetrică a sa faţă de unul din ceilalţi doi greieri. Este posibil ca, după un număr finit de mişcări vreunul din greieri să ajungă în cel de-al patrulea vârf al pătratului ?

Soluţie:

Fie $P(a,b)$, $a,b\in\mathbb{Z}$ punctul în care se află un greiere înainte de o săritură şi $M(c,d)$, $c,d\in\mathbb{Z}$ punctul în care se află greierele faţă de care el sare în poziţia simetrică 1p

Dacă $P'(x,y)$ este poziţia în care ajunge greierele, atunci M este mijlocul segmentului PP' 1p

$c=\frac{a+x}{2},\ d=\frac{b+y}{2}$ 1p

$P'(2c-a,2d-b)$ 1p

Numerele a şi $2c$ - a respectiv b şi $2d-b$ au aceiaşi paritate 2p

Cum iniţial nici un greiere nu se află într-un punct cu ambele coordonate impare, nici unul nu poate ajunge în punctul $B(1,1)$ 1p

<u>Notă:</u> Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

Clasa a XI a

1. Considerăm mulţimea $H = \left\{ A \in M_2(\mathbb{C}) / A^2 = A \right\}$.

a) Demonstraţi că $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$.

b) Demonstraţi că mulţimea *H* este infinită.

c) Dacă $A \in H$, demonstraţi că suma elementelor de pe diagonala principală a matricei *A* este egală cu 0, 1 sau 2.

d) Demonstraţi că matricea $X = \begin{pmatrix} 2011 & 0 \\ 0 & -2012 \end{pmatrix}$ **nu** poate fi scrisă ca o sumă finită de elemente din mulţimea *H*.

<u>Soluţie:</u>

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$ 1p

b) $X = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H, \ \forall a \in \mathbb{C}$ (sau oricare altă mulţime infinită de matrice) 2p

c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ A \in H \Rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = a \\ b(a+d) = b \\ c(a+d) = c \\ bc + d^2 = d \end{cases}$ 1p

$a + d = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}, \ bc = a - a^2$ 1p

$a + d \neq 1 \Rightarrow A = I_2$ sau $A = O_2$ deci $a + d = 2$ sau $a + d = 0$

d) $X = A_1 + A_2 + ... + A_n, \ n \in \mathbb{N}^*, A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 + d_1, a_2 + d_2, ..., a_n + d_n \in \{0,1,2\}$ 1p

Rezultă $2011 + (-2012) = (a_1 + d_1) + (a_2 + d_2) + ... + (a_n + d_n)$, imposibil 1p

2. Fie matricele : $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $X(t) = tA + I_2$, unde $t \in \mathbb{R}$.

a) Demonstraţi că $X(a)X(b) = X(ab + a + b), \forall a, b \in \mathbb{R}$.

b) Calculaţi $(X(t))^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Calculaţi $\det X(t)$ şi apoi determinaţi $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$X(1)X(2) \cdot ... \cdot X(2011) = X(m-1)$.

(Se poate folosi proprietatea $\det(XY) = (\det X)(\det Y), \ \forall X, Y \in M_2(\mathbb{R})$)

<u>Soluţie:</u>

a) $A^2 = A$ 1p

$X(a)X(b) = (aA + I_2)(bA + I_2) = abA^2 + aA + bA + I_2 = A(ab + a + b) + I_2 = X(ab + a + b)$ 1p

(Pentru verificare directă se acordă 3 puncte)

b) $\left(X(t)\right)^2 = X\left(t^2+2t\right) = X\left[(t+1)^2-1\right]$, $\left(X(t)\right)^3 = X\left[(t+1)^3-1\right]$ 2p

Prin inducție se demonstrează $\left(X(t)\right)^n = X\left[(t+1)^n-1\right]$ 1p

c) $\det\left(X(1)X(2)\cdot\ldots\cdot X(2011)\right) = \det\left(X(m-1)\right) \Rightarrow 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2012 = m \Rightarrow m = 2012!$

Se verifică faptul că $m = 2012!$ este soluție 2p

3. a) Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{2x^2+4x+5}-ax-b$. Determinați parametrii reali *a* și *b* astfel încât dreapta de ecuație $y=2\sqrt{2}$ să fie asimptotă la graficul funcției *f* spre $+\infty$.

b) Fie funcția $f:(-\infty,4)\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} c\log_2(4-x), & x\in(-\infty,2] \\ \dfrac{x^2+x-6}{x^2-7x+10}, & x\in(2,4)\end{cases}$.

Determinați parametrul *c* astfel încât funcția *f* să fie continuă pe $(-\infty,4)$.

Soluție:

$y=2\sqrt{2}$ este asimptotă orizontală $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2\sqrt{2}$ 1p

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{2+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)=\infty\cdot\left(\sqrt{2}-a\right)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2\sqrt{2}\Rightarrow \cdot a=\sqrt{2}$ 1p

Pentru $a=\sqrt{2}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+4x+5}-x\sqrt{2}-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+5}{\sqrt{2x^2+4x+5}+x\sqrt{2}}-b\right)=\sqrt{2}-b$ 1p

$\sqrt{2}-b=2\sqrt{2}\Rightarrow b=-\sqrt{2}$ 1p

b) *f* este continuă pe $(-\infty,4)\setminus\{2\}$ 1p

f continuă în 2 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\nearrow 2} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 2} f(x)=f(2)$ 1p

$c=-\dfrac{5}{3}$ 1p

4. Pe o tablă de șah(pătrat de forma 8×8, împărțit în 64 pătrățele) sunt scrise numerele naturale de la 1 la 64, către unul în fiecare pătrățel, fiecare număr fiind scris o singură dată. O operație constă în ștergerea arbitrară a două numere *a* și *b*, de pe tablă, și doar în locul unuia dintre ele se scrie numărul $(a+b-1)$. Ce număr rămâne pe tablă după a 63-a operație?

Soluție:

Fie S suma numerelor de pe tablă înaintea efectuării unei operații. După efectuarea operației suma devine $S-(a+b)+(a+b-1)=S-1$ 2p

Prin urmare la o operație suma scade cu o unitate 2p

Fie $S_0=1+2+3+\ldots+64=2080$, suma inițială 1p

După 63 de operații suma totală este $2080-63=2017$ ....
1p

Numărul rămas este 2017(deoarece rămâne un singur număr) 1p

Notă: Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ – 20 aprilie 2012
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

Clasa a XII-a

1. Pe mulţimea $G=(-2,2)$, definim legea de compoziţie : $x*y=\dfrac{4(x+y)}{4+xy}, \forall x,y\in G$.

a) Demonstraţi că $(G,*)$ este un grup comutativ.

b) Pentru orice $t\in G$, definim funcţia $f:G\to\mathbb{R},\ f(t)=\int_0^t \dfrac{dx}{4-x^2}$.

Demonstraţi că f este izomorfism de la $(G,*)$ la $(\mathbb{R},+)$.

<u>Soluţie:</u>

a) Legea * este corect definită ... 1p

Asociativitate şi comutativitate ... 1p

e = 0 element neutru ... 1p

Simetricul elementului $x\in G$ este $x'=-x\in G$ ... 1p

b) $f(t)=\dfrac{1}{4}\cdot\ln\dfrac{2+t}{2-t}$ ... 1p

f este bijectivă ... 1p

$f(x*y)=f(x)+f(y), \forall x,y\in G$ ... 1p

2. Se consideră polinomul $f=X^4-aX^3-aX+1$, unde $a\in\mathbb{R}$, având rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

a) Demonstraţi că polinomul f nu se divide cu X^2-1, pentru nici o valoare a lui a.

b) Demonstraţi că pentru $a=\dfrac{1}{2}$, toate rădăcinile lui f au modulul egal cu 1.

<u>Soluţie:</u>

a) f se divide cu $X^2-1 \Leftrightarrow f(1)=0;\ f(-1)=0$ ... 1p

Obţinem $2-2a=0$ şi $2+2a=0$ ... 1p

Sistemul nu are soluţie ... 1p

SAU

f împărţit la X^2-1 dă restul $r=-2ax+2$ ... 1p

f se divide cu $X^2-1 \Leftrightarrow r=0$ ... 1p

$r=0 \Leftrightarrow -2a=0;\ 2=0$, imposibil ... 1p

b) $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=0$ ... 1p

$x+\dfrac{1}{x}=y \Rightarrow 2y^2-y-4=0;\quad y_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{4}$ ... 1p

$x^2-xy_1+1=0$ are rădăcini complexe nenule

$x_1=\alpha+i\beta,\ x_2=\alpha-i\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. $x_1x_2=1\Rightarrow \alpha^2+\beta^2=1$, deci $|x_1|=|x_2|=1$ ... 1p

Din $x^2-xy_2+1=0$ analog rezultă $|x_3|=|x_4|=1$ ... 1p

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă.

a) Demonstraţi că $\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^\pi f(\sin x)dx.$

(Eventual, puteţi schimba variabila prin $x=\pi-t$.)

b) Calculaţi $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}dx$.

Soluţie:

a) Cu substituţia $x=\pi-t$, obţinem 1p

$I=\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\int_\pi^0(\pi-t)f(\sin t)\cdot(-dt)=$ 1p

$=\int_0^\pi \pi\cdot f(\sin t)dt-\int_0^\pi t\cdot f(\sin t)dt$ 1p

$I=\pi\int_0^\pi f(\sin t)dt-I\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^\pi f\left(\sin x\right)dx$ 1p

b) Considerând $f(y)=\frac{y}{1+y^2}$, $I=\int_0^\pi x\cdot\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}dx$ 1p

Cu substituţia $\cos x=t\Rightarrow\int_0^\pi\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}dx=-\int_{-1}^1\frac{dt}{t^2-2}$ 1p

$I=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)$ (sau $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$) 1p

4. Pe o tablă este scrisă ecuaţia : $x^3+*\cdot x^2+*\cdot x+*=0$. Doi jucători procedează astfel: primul înlocuieşte o steluţă cu un număr întreg, al doilea înlocuieşte una dintre steluţele rămase cu un număr întreg , după care iarăşi primul jucător înlocuieşte ultima steluţă rămasă tot cu un număr întreg. Demonstraţi că primul jucător poate proceda aşa încât ecuaţia să aibă toate rădăcinile întregi.

Soluţie:

Primul jucător înlocuieşte steluţa din faţa lui x cu -1 .... 2p

Al doilea jucător înlocuieşte una din steluţele rămase cu $a\in\mathbb{Z}$ 1p

Primul jucător înlocuieşte steluţa rămasă cu $-a$ 2p

Obţinem ecuaţia $x^3+ax^2-x-a=0$ cu rădăcinile $-a,\ 1,\ -1$ 1p

sau ecuaţia $x^3-ax^2-x+a=0$ cu rădăcinile $a,\ -1,\ 1$ 1p

Notă: Orice rezolvare corectă se punctează echivalent.