CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ - 20 aprilie 2012
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

Clasa a IX-a

1. Se dă funcţia $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^*-\{1\}$, care satisface egalităţile:

$f(0)=-\dfrac{1}{2012}$ şi $f(n+503)=\dfrac{1+f(n)}{1-f(n)}, \forall n\in\mathbb{N}.$

a) Calculaţi $f(503)$ şi $f(1006)$.

b) Demonstraţi că $f(n+1006)=-\dfrac{1}{f(n)}, \forall n\in\mathbb{N}.$

c) Demonstraţi că f este periodică de perioadă 2012.

2. Considerăm progresia aritmetică cu termeni strict pozitivi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $S_n=a_1+a_2+...+a_n$.

Demonstraţi că:

a) $n\cdot(a_k+a_{n-k+1})=2S_n, \forall k\in\{1,2,...,n\}$

b) $\dfrac{n}{a_k}+\dfrac{n}{a_{n-k+1}}\le\dfrac{2S_n}{a_1\cdot a_n}, \forall k\in\{1,2,...,n\}$

c) $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_n}\le\dfrac{S_n}{a_1\cdot a_n}$.

3. Preţul unui litru de FANTA este diferit de preţul unui litru de PRIGAT. Intr-un butoi avem n litri de FANTA , iar în altul avem m litri de PRIGAT. Din primul butoi scoatem 1006 litri de FANTA , iar din al doilea scoatem 1006 litri de PRIGAT. Turnăm cei 1006 litri de FANTA în al doilea butoi şi cei 1006 litri de PRIGAT în primul butoi. După această operaţie, un litru de suc are acelaşi preţ, indiferent de butoiul din care se ia. Determinaţi m şi n , ştiind că $m+n$ are valoarea minimă posibilă.

4. 1900 de nuci sunt mai scumpe decât 95 de ciocolate, dar mai ieftine decât 96 de ciocolate. Să se demonstreze că o ciocolată şi o nucă (preţul fiecăreia fiind un număr întreg de bani), împreună, costă mai mult de un leu. (Puteţi folosi faptul că dacă $a,b,c,d\in\mathbb{N}$ şi $a>b$, atunci $a\ge b+1$, iar dacă $c<d$, atunci $c\le d-1$)

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ - 20 aprilie 2012
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

Clasa a X-a

1. Se dă numărul complex $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

a) Demonstraţi că $z^2-z+1=0$ şi $z^3+1=0$.

b) Calculaţi $S_k=z^k+\frac{1}{z^k},\ k\in\{1,2,3,4,5,6\}$.

c) Demonstraţi că $P=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\cdot.....\cdot\left(z^{99}+\frac{1}{z^{99}}\right)=2^{33}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, care verifică egalitatea:
$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)-f(xy)+1, \forall x,y\in\mathbb{Z}$ şi $f(1)=2$.

a) Demonstraţi că $f(x+1)=1+f(x), \forall x\in\mathbb{Z}$.

b) Demonstraţi că $f(x+n)=n+f(x), \forall x\in\mathbb{Z}$ şi $\forall n\in\mathbb{N}$.

c) Determinaţi funcţia *f*.

3. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{R}$, ecuaţia: $\log_2\left(1+\sqrt{x}\right)=\log_3 x$.

4. Într-un plan, relativ la sistemul ortogonal de axe de coordonate, considerăm pătratul *OABC*, unde $O(0,0); A(1,0); B(1,1)$ şi $C(0,1)$. Trei greieri sunt amplasaţi în vârfurile *O, A* şi *C.* La o mişcare un greier sare în poziţia simetrică a sa faţă de unul din ceilalţi doi greieri. Este posibil ca, după un număr finit de mişcări vreunul din greieri să ajungă în cel de-al patrulea vârf al pătratului ?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ - 20 aprilie 2012
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

Clasa a XI a

1. Considerăm mulţimea $H = \left\{ A \in M_2(\mathbb{C}) / A^2 = A \right\}$.

a) Demonstraţi că $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H$.

b) Demonstraţi că mulţimea *H* este infinită.

c) Dacă $A \in H$, demonstraţi că suma elementelor de pe diagonala principală a matricei *A* este egală cu 0, 1 sau 2.

d) Demonstraţi că matricea $X = \begin{pmatrix} 2011 & 0 \\ 0 & -2012 \end{pmatrix}$ **nu** poate fi scrisă ca o sumă finită de elemente din mulţimea *H*.

2. Fie matricele : $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $X(t) = tA + I_2$, unde $t \in \mathbb{R}$.

a) Demonstraţi că $X(a)X(b) = X(ab + a + b), \forall a, b \in \mathbb{R}$.

b) Calculaţi $\left(X(t)\right)^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Calculaţi $\det X(t)$ şi apoi determinaţi $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$X(1)X(2)\cdot\ldots\cdot X(2011) = X(m-1).$$

(Se poate folosi proprietatea $\det(XY) = (\det X)(\det Y),\ \forall X, Y \in M_2(\mathbb{R})$)

3. a) Considerăm funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2x^2 + 4x + 5} - ax - b$. Determinaţi parametrii reali *a* şi *b* astfel încât dreapta de ecuaţie $y = 2\sqrt{2}$ să fie asimptotă la graficul funcţiei *f* spre $+\infty$.

b) Fie funcţia $f:(-\infty, 4) \to \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} c\log_2(4-x), x \in (-\infty, 2] \\ \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 7x + 10}, x \in (2, 4) \end{cases}$.

Determinaţi parametrul *c* astfel încât funcţia *f* să fie continuă pe $(-\infty, 4)$.

4. Pe o tablă de şah(pătrat de forma 8×8, împărţit în 64 pătrăţele) sunt scrise numerele naturale de la 1 la 64, câtre unul în fiecare pătrăţel, fiecare număr fiind scris o singură dată. O operaţie constă în ştergerea arbitrară a două numere *a* şi *b*, de pe tablă, şi doar în locul unuia dintre ele se scrie numărul $(a + b - 1)$. Ce număr rămâne pe tablă după a 63-a operaţie?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ - 20 aprilie 2012
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

Clasa a XII-a

1. Pe mulţimea $G=(-2,2)$, definim legea de compoziţie : $x*y=\dfrac{4(x+y)}{4+xy}, \forall x,y\in G$.

a) Demonstraţi că $(G,*)$ este un grup comutativ.

b) Pentru orice $t\in G$, definim funcţia $f:G\to\mathbb{R},\ f(t)=\int_0^t \dfrac{dx}{4-x^2}$.

Demonstraţi că f este izomorfism de la $(G,*)$ la $(\mathbb{R},+)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-aX^3-aX+1$, unde $a\in\mathbb{R}$, având rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

a) Demonstraţi că polinomul f nu se divide cu X^2-1, pentru nici o valoare a lui a.

b) Demonstraţi că pentru $a=\dfrac{1}{2}$, toate rădăcinile lui f au modulul egal cu 1.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă.

a) Demonstraţi că $\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\dfrac{\pi}{2}\cdot\int_0^\pi f(\sin x)dx.$

(Eventual, puteţi schimba variabila prin $x=\pi-t$.)

b) Calculaţi $\int_0^\pi \dfrac{x\sin x}{1+\sin^2 x}dx$.

4. Pe o tablă este scrisă ecuaţia : $x^3+*\cdot x^2+*\cdot x+*=0$. Doi jucători procedează astfel: primul înlocuieşte o steluţă cu un număr întreg, al doilea înlocuieşte una dintre steluţele rămase cu un număr întreg , după care iarăşi primul jucător înlocuieşte ultima steluţă rămasă tot cu un număr întreg. Demonstraţi că primul jucător poate proceda aşa încât ecuaţia să aibă toate rădăcinile întregi.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*