

Polinoame

Forma canonică a polinomului cu coeficienți în corpul comutativ K	$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X^1 + a_0$, cu $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$, K fiind un corp comutativ și $a_0 \neq 0$
Mulțimea polinoamelor cu coeficienți în corpul comutativ K	$K[X]$, K corp comutativ ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, p$ prim) $(K[X], +, \cdot)$ este <i>inel comutativ</i>
Gradul polinomului	Dacă $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X^1 + a_0$, $\text{grad } f = n$ Dacă $f = 0$, $\text{grad } f = -\infty$
Valoarea polinomului	Def. Pentru $\alpha \in K$, valoarea polinomului f în α , este $f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0$
Valoarea polinomului - Proprietăți	1. $f \in \mathbb{R}[X]$ și $z \in \mathbb{C}$, atunci $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ unde $z = x + yi$ iar $\bar{z} = x - yi$ este conjugatul lui z 2. $f \in \mathbb{Q}[X]$, $a, b \in \mathbb{Q}, \sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, b > 0$, atunci $f(a \pm \sqrt{b})$ este de forma $A \pm B\sqrt{b}$, $A, B \in \mathbb{Q}$
Operații cu polinoame – sumă de polinoame (adunare)	$f, g \in K[X]$, $f = a_0 + a_1 X^1 + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n$ și $g = b_0 + b_1 X^1 + \dots + b_{m-1} X^{m-1} + b_m X^m$ $f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \dots$ (adică se adună termenii asemenea) $\text{Gradul } (f + g) \leq \max(\text{grad } f; \text{grad } g)$
Operații cu polinoame – produs de polinoame (înmulțire) (Se folosește formula $a^i \cdot a^j = a^{i+j}$)	$f, g \in K[X]$, $f = a_0 + a_1 X^1 + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n$ și $g = b_0 + b_1 X^1 + \dots + b_{m-1} X^{m-1} + b_m X^m$ $f \cdot g = a_0(b_0 + b_1 X^1 + \dots + b_{m-1} X^{m-1} + b_m X^m) +$ $a_1 X(b_0 + b_1 X^1 + \dots + b_{m-1} X^{m-1} + b_m X^m) + \dots +$ $a_n X^n(b_0 + b_1 X^1 + \dots + b_{m-1} X^{m-1} + b_m X^m)$ Se fac înmulțirile și se adună termenii asemenea $\text{Gradul } (f \cdot g) = \text{grad } f + \text{grad } g$
Operații cu polinoame – împărțirea polinoamelor	Teorema împărțirii cu rest Oricare ar fi polinoamele $f, g \in K[X]$, $g \neq 0$, există și sunt unice polinoamele $c, r \in K[X]$ pentru care a) $f = g \cdot c + r$ și b) $\text{grad } r < \text{grad } g$ Teorema restului Restul împărțirii unui polinom f prin binomul $X - a$ este egal cu valoarea $f(a)$ a polinomului f în a . Obs. Pentru a afla câtul și restul împărțirii unui polinom f prin binomul $X - a$ se poate folosi și schema lui Horner

Divizibilitate	Def. Fie $f, g \in K[X]$, spunem că polinomul f este divizibil prin polinomul g, dacă există un polinom $h \in K[X]$ astfel încât $f = g \cdot h$. (adică restul împărțirii lui f la g este 0). Notăm $f : g$ (adică f este divizibil prin g) sau g / f (adică g îl divide pe f) C.m.m.d.c Def. Fie $f, g \in K[X]$. Un polinom $d \in K[X]$ se numește cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) al polinoamelor f și g dacă verifică următoarele condiții: a) d / f și d / g b) $\forall d' \in K[X]$ astfel încât d' / f și d' / g, rezultă d' / d C.m.m.d.c. al polinoamelor f și g se notează (f, g). Algoritmul lui Euclid Def. C.m.m.d.c. al polinoamelor $f, g \in K[X]$ se poate obține cu următorul algoritm: -se împarte polinomul f (de grad mai mare) la cel de grad mai mic, g, obținând câtul q_1 și restul r_1 -se împarte împărțitorul g la restul r_1 și se obțin câtul q_2 și restul r_2 -se continuă procedeul, împărțind împărțitorul la rest -ultimul rest nenul obținut este c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g. Def. Fie $f, g \in K[X]$. Spunem că polinoamele f și g sunt <i>prime între ele</i> dacă $(f, g) = 1$, (1 fiind polinom constant). C.m.m.m.c. Def. Fie $f, g \in K[X]$. Un polinom $m \in K[X]$ se numește cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.) al polinoamelor f și g dacă verifică următoarele condiții: a) f / m și g / m b) $\forall m' \in K[X]$ astfel încât f / m' și g / m', rezultă m / m' C.m.m.m.c. al polinoamelor f și g se notează $[f, g]$. Teoremă Fie $f, g \in K[X]$ astfel încât $f \neq 0$ sau $g \neq 0$. Atunci avem $[f, g] \cdot (f, g) = f \cdot g$
Rădăcinile polinoamelor	Def. Numărul $\alpha \in K$ se numește rădăcină a polinomului $f \in K[X]$, dacă $f(\alpha) = 0$ Teorema lui Bézout Numărul $\alpha \in K$ se numește rădăcină a polinomului $f \in K[X]$, $f \neq 0$, dacă și numai dacă f este divizibil cu $X - \alpha$. Teorema fundamentală a algebrei (Teorema D'Alembert-Gauss) Orice polinom $f \in \mathbb{C}[X]$, grad $f \geq 1$, are cel puțin o rădăcină în $\mathbb{C}$. Observație: Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$, grad $f = n$, atunci f are exact n rădăcini complexe, nu neapărat distincte. Def. Spunem că numărul $\alpha \in K$ se numește <i>rădăcină multiplă de ordinul k</i>, $k \in \mathbb{N}^*$, a polinomului $f \in K[X]$ dacă $(X - \alpha)^k / f$ și $(X - \alpha)^{k+1} \nmid f$.

	Teoremă 1 Fie $f \in K[X]$, $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ și $a \in K$. Polinomul f are a rădăcină multiplă de ordinul k, dacă și numai dacă $f(a) = 0; f'(a) = 0; \dots; f^{(k-1)}(a) = 0; f^{(k)}(a) \neq 0$. Teoremă 2 Fie $f \in K[X]$ și $a, b \in K, a \neq b$. Polinomul $f: (X-a)(X-b)$ dacă și numai dacă $f(a) = f(b) = 0$. Teoremă 3 Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ și $\alpha \in \mathbb{C}$ o rădăcină a lui f, Atunci : a) $\bar{\alpha}$ este de asemenea o rădăcină a lui f; b) α și $\bar{\alpha}$ au același ordin de multiplicitate. Teoremă 4 Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$ și $a+b\sqrt{d}$ o rădăcină a lui f ($a, b, d \in \mathbb{Q}, d > 0, \sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$). Atunci : a) $a-b\sqrt{d}$ este de asemenea o rădăcină a lui f; b) $a+b\sqrt{d}$ și $a-b\sqrt{d}$ au același ordin de multiplicitate. Teoremă 5 Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X^1 + a_0$, $\text{grad } f = n \geq 1$, iar $\alpha = \frac{p}{q}$ o rădăcină rațională a lui f, $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, (p, q) = 1$. Atunci: a) p divide termenul liber a_0; b) q divide coeficientul dominant a_n.
Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili	Def. Fie $f \in K[X]$, $\text{grad } f = n \geq 1$. Spunem că f este polinom <i>reductibil</i> peste K dacă există $f_1, f_2 \in K[X]$ astfel încât $f = f_1 \cdot f_2$, $\text{grad } f_1 < n$, $\text{grad } f_2 < n$. În caz contrar, spunem că f este polinom <i>ireductibil</i> peste K. Observații: 1. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $\text{grad } f = 2$, $f = aX^2 + bX + c$. Atunci : a) f este reductibil peste $\mathbb{C}$; b) f este reductibil peste $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ 2. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X^1 + a_0$, $\text{grad } f = n \geq 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_n$. Atunci f se descompune unic $f = a_n (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n)$ 3. Orice polinom $f \in \mathbb{R}[X]$, $\text{grad } f = n \geq 1$, se descompune unic într-un produs de polinoame de gradul I sau gradul II cu coeficienți reali.
Relațiile lui Viète	Cazul $n = 2$ Fie $f \in K[X]$, $f = a_2 X^2 + a_1 X + a_0$, $a_2 \neq 0$, x_1, x_2 rădăcinile lui f. Atunci : relațiile lui Viète sunt $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2} \\ x_1 x_2 = \frac{a_0}{a_2} \end{cases}$ Reciproc : dacă x_1, x_2 rădăcinile lui f, atunci $f = a(X^2 - S_1 X + S_2)$, $a \in K \setminus \{0\}$, unde

	$S_1 = x_1 + x_2$ și $S_2 = x_1 x_2$ Cazul $n = 3$ Fie $f \in K[X]$, $f = a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$, $a_3 \neq 0$, x_1, x_2, x_3 rădăcinile lui f. Atunci : relațiile lui Viète sunt $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{a_1}{a_3} \\ x_1 x_2 x_3 = -\frac{a_0}{a_3} \end{cases}$ Reciproc : dacă x_1, x_2, x_3 rădăcinile lui f, atunci $f = a(X^3 - S_1 X^2 + S_2 X - S_3)$, $a \in K \setminus \{0\}$, unde $S_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $S_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$ și $S_3 = x_1 x_2 x_3$ Cazul $n = 4$ Fie $f \in K[X]$, $f = a_4 X^4 + a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$, $a_4 \neq 0$, x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile lui f. Atunci : relațiile lui Viète sunt $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{a_3}{a_4} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = \frac{a_2}{a_4} \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = -\frac{a_1}{a_4} \\ x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{a_0}{a_4} \end{cases}$ Reciproc : dacă x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile lui f, atunci $f = a(X^4 - S_1 X^3 + S_2 X^2 - S_3 X + S_4)$, $a \in K \setminus \{0\}$, unde $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $S_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4$, $S_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4$ și $S_4 = x_1 x_2 x_3 x_4$ Relații importante: $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$ $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) \Rightarrow$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)$
Ecuatii bipătrate	$ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ Se face substituția : $x^2 = t$ atunci $x^4 = t^2$ Obținem ecuația $at^2 + bt + c = 0$ care se rezolvă, rezultând t_1, t_2

	$\left. \begin{matrix} x^2 = t_1 \\ t_1 \geq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 = \sqrt{t_1}, x_2 = -\sqrt{t_1} .$ $\left. \begin{matrix} x^2 = t_1 \\ t_1 < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R}, (x_1 = i\sqrt{t_1}, x_2 = -i\sqrt{t_1} \in \mathbb{C})$ $\left. \begin{matrix} x^2 = t_2 \\ t_2 \geq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x_3, x_4 \in \mathbb{R}, x_3 = \sqrt{t_2}, x_4 = -\sqrt{t_2} .$ $\left. \begin{matrix} x^2 = t_2 \\ t_2 < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x_3, x_4 \notin \mathbb{R}, (x_3 = i\sqrt{t_2}, x_4 = -i\sqrt{t_2} \in \mathbb{C})$															
Ecuatii reciproce	Ecuatia reciproca de gradul 3 (coeficientii termenilor egali departati de capete sunt egali) $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ admite solutia $x_1 = -1$ Aplicam schema lui Horner <table><tr><td></td><td>x^3</td><td>x^2</td><td>x^1</td><td>x^0</td></tr><tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>b</td><td>a</td></tr><tr><td>-1</td><td>a</td><td>$b - a$</td><td>a</td><td>0</td></tr></table> Catul impartirii este $ax^2 + (b - a)x + a$, egalam catul cu 0 (ecuatie de gradul II) si rezultă x_2, x_3. Observatie : daca coeficientii termenilor egali departati de capete sunt opusi, adica $ax^3 + bx^2 - bx - a = 0, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ admite solutia $x_1 = 1$ Pentru rezolvare se procedeaza ca mai sus. Ecuatia reciproca de gradul 4 (coeficientii termenilor egali departati de capete sunt egali) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ Observam ca $x = 0$ nu este solutie deci putem imparti ecuatia cu x^2, se obtine $ax^2 + bx + c + b \cdot \frac{1}{x} + a \cdot \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow a \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \left(x + \frac{1}{x} \right) + c = 0$ Facem substitutia $x + \frac{1}{x} = t$, deci $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ Obtinem ecuatia $a(t^2 - 2) + bt + c = 0 \Leftrightarrow at^2 + bt + c - 2a = 0$, care se rezolva si rezultă t_1, t_2 Din $x + \frac{1}{x} = t_1 \Leftrightarrow x^2 - t_1x + 1 = 0 \Rightarrow x_1, x_2$ Din $x + \frac{1}{x} = t_2 \Leftrightarrow x^2 - t_2x + 1 = 0 \Rightarrow x_3, x_4$		x^3	x^2	x^1	x^0		a	b	b	a	-1	a	$b - a$	a	0
	x^3	x^2	x^1	x^0												
	a	b	b	a												
-1	a	$b - a$	a	0												