

Breviar teoretic

Def 1. Fie M o mulțime nevidă. O aplicație / funcție de tipul $*$: $M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y$, se numește lege de compoziție internă (operație algebrică) pe mulțimea M .

Def 2. Fie o lege de compoziție "*" pe M . O submulțime nevidă H a lui M se numește parte stabilă a lui M în raport cu legea "*" dacă, pentru orice elemente x și y din H , elementul $x * y$ este tot din H .

Def 3. O lege de compoziție "*" pe o mulțime M se numește asociativă dacă
 $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in M$.

Def 4. O lege de compoziție "*" pe o mulțime M se numește comutativă dacă
 $x * y = y * x, \forall x, y \in M$.

Def 5. Spunem că o lege de compoziție "*" pe o mulțime M , are element neutru dacă există $e \in M$ astfel încât $x * e = e * x = x, \forall x \in M$. Elementul e se numește element neutru față de operația "*".

Def 6. Fie "*" o lege de compoziție pe M care are elementul neutru e . Spunem că un element $x \in M$ este simetrizabil în raport cu legea "*", dacă există $x' \in M$ astfel încât $x * x' = x' * x = e$. Elementul x' se numește simetricul lui x .

Monoid	Grup
Fie M o mulțime nevidă și "*" o lege de compoziție pe M. Perechea $(M; *)$ se numește <u>monoid</u> dacă: A: legea "*" este asociativă; E: legea "*" are element neutru; Dacă în plus legea "*" este comutativă (C) atunci $(M; *)$ este <u>monoid comutativ</u>. Dacă există în M, elemente simetrizabile în raport cu legea "*", acestea se numesc <u>unitățile monoidului</u>.	Fie G o mulțime nevidă și "o" o lege de compoziție pe G. Perechea $(G; \circ)$ se numește <u>grup</u> dacă: A: legea "o" este asociativă; E : legea "o" are element neutru; S : toate elementele lui G sunt simetrizabile în raport cu legea "o". Dacă în plus legea "o" este comutativă (C) atunci $(G; \circ)$ este <u>grup comutativ</u>.

Exerciții rezolvate:

1. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.

- Să se verifice dacă legea "o" este asociativă ;
- Să se verifice dacă legea "o" este comutativă ;
- Să se determine elementul neutru față de legea "o" ;
- Să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea "o" ;
- Să se precizeze dacă $(\mathbb{R}; \circ)$ este grup sau monoid;
- Să se verifice că $x \circ y = (x + 4)(y + 4) - 4$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$;
- Să se calculeze $x \circ (-4)$, unde x este un număr real;
- Să se calculeze $(-2009) \circ (-2008) \circ \dots \circ 2008 \circ 2009$;
- Să se calculeze $2 \circ (-5); (-3) \circ (-1)$;
- Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile: $x \circ 3 = 5$; $x \circ x = -3$
- Să se determine $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{N}$

Rezolvare:

a) legea " $\circ$ " este asociativă dacă $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

calculăm fiecare membru al egalității și apoi comparăm rezultatele:

$$\begin{aligned} (x \circ y) \circ z &= (x \circ y)z + 4(x \circ y) + 4z + 12 \\ &= (xy + 4x + 4y + 12)z + 4(xy + 4x + 4y + 12) + 4z + 12 \end{aligned} \quad (1)$$

$$= xyz + 4xz + 4yz + 12z + 4xy + 16x + 16y + 48 + 4z + 12$$

$$= xyz + 4xz + 4yz + 4xy + 16x + 16y + 16z + 60$$

$$\begin{aligned} x \circ (y \circ z) &= x(y \circ z) + 4x + 4(y \circ z) + 12 \\ &= x(yz + 4y + 4z + 12) + 4x + 4(yz + 4y + 4z + 12) + 12 \end{aligned} \quad (2)$$

$$= xyz + 4xy + 4xz + 12x + 4x + 4yz + 16y + 16z + 48 + 12$$

$$= xyz + 4xy + 4xz + 4yz + 16x + 16y + 16z + 60$$

Din (1) și (2) rezultă că cele două rezultate sunt egale, deci $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$, adică legea " $\circ$ " este asociativă.

b) legea " $\circ$ " este comutativă dacă $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{aligned} x \circ y &= xy + 4x + 4y + 12 \\ y \circ x &= yx + 4y + 4x + 12 \end{aligned} \right\} \text{observăm că sunt egale datorită comutativității operațiilor de adunare și}$$

înmulțire din $\mathbb{R}$, rezultă că $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in \mathbb{R}$ adică legea " $\circ$ " este comutativă.

c) legea " $\circ$ " admite element neutru dacă există $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in \mathbb{R}$

legea " $\circ$ " este comutativă (conform punctul b)) deci vom rezolva doar o ecuație pentru a găsi elementul neutru:

$$\begin{aligned} x \circ e &= x \Leftrightarrow xe + 4x + 4e + 12 = x \Leftrightarrow e(x + 4) = x - 4x - 12 \Leftrightarrow e(x + 4) = -3x - 12 \Leftrightarrow e(x + 4) = -3(x + 4) \\ &\Leftrightarrow e = -3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

deci elementul neutru este $e = -3$.

d) Un element $x \in \mathbb{R}$ este simetrizabil în raport cu legea " $\circ$ ", dacă există $x' \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem $x \circ x' = x' \circ x = e$; cum legea " $\circ$ " este comutativă, vom rezolva o singură ecuație:

$$x \circ x' = e \Leftrightarrow xx' + 4x + 4x' + 12 = -3 \Leftrightarrow x'(x + 4) = -4x - 15 \Rightarrow x' = \frac{-4x - 15}{x + 4}, x + 4 \neq 0, \text{ adică } x \neq -4$$

Prin urmare observăm că toate elementele $x \in \mathbb{R}, x \neq -4$ sunt simetrizabile în raport cu legea " $\circ$ ", adică mulțimea elementelor simetrizabile în raport cu legea " $\circ$ ", este $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

e) Conform a), legea " $\circ$ " este asociativă pe $\mathbb{R}$, conform b) legea " $\circ$ " este comutativă pe $\mathbb{R}$, conform c) legea " $\circ$ " pe $\mathbb{R}$ are element neutru $e = -3$ iar conform d) elementele $x \in \mathbb{R}, x \neq -4$ sunt simetrizabile în raport cu legea " $\circ$ ", prin urmare $(\mathbb{R}; \circ)$ nu poate fi grup (pentru că nu toate elementele lui $\mathbb{R}$ sunt simetrizabile), adică $(\mathbb{R}; \circ)$ este monoid comutativ și mulțimea unităților monoidului este $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$

$$f) \quad x \circ y = (x + 4)(y + 4) - 4 \Leftrightarrow x \circ y = xy + 4x + 4y + 16 - 4 \Leftrightarrow x \circ y = xy + 4x + 4y + 12 \quad (A)$$

(am desfăcut parantezele)

$$g) \quad x \circ (-4) = x(-4) + 4x + 4(-4) + 12 = \underbrace{-4x + 4x}_0 - 16 + 12 = -4$$

$$\text{Sau folosind relația de la punctul f) } x \circ (-4) = (x + 4) \underbrace{(-4 + 4)}_0 - 4 = \underbrace{(x + 4) \cdot 0}_0 - 4 = -4$$

h) Pentru a calcula $(-2009) \circ (-2008) \circ \dots \circ 2008 \circ 2009$ folosim punctul g) adică $x \circ (-4) = -4$

Știm că legea " $\circ$ " este comutativă pe $\mathbb{R}$ deci $(-4) \circ x = x \circ (-4) = -4$, dar și

$$(-4) \circ y = \underbrace{(-4+4)}_0 (y+4) - 4 = -4 \text{ adică } x \circ (-4) \circ y = -4, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Prin urmare

$$(-2009) \circ (-2008) \circ \dots \circ 2008 \circ 2009 = (-2009) \circ (-2008) \circ \dots \circ \underbrace{(-5) \circ (-4) \circ (-3)}_{-4} \circ \dots \circ 2008 \circ 2009 = \dots =$$

$$(-2009) \circ (-4) \circ (2009) = -4$$

$$2 \circ (-5) = 2 \cdot (-5) + 4 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) + 12 = -10 + 8 - 20 + 12 = -10$$

$$i) \quad (-3) \circ (-1) = (-3) \cdot (-1) + 4 \cdot (-3) + 4 \cdot (-1) + 12 = 3 - 12 - 4 + 12 = -1$$

$$j) \quad x \circ 3 = 5 \Leftrightarrow x \cdot 3 + 4x + 4 \cdot 3 + 12 = 5 \Leftrightarrow 7x = 5 - 24 \Leftrightarrow 7x = -19 \Leftrightarrow x = -\frac{19}{7} \in \mathbb{R} \text{ deci } S = \left\{ -\frac{19}{7} \right\}$$

$$x \circ x = -3 \Leftrightarrow x \cdot x + 4x + 4x + 12 = -3 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 12 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 15 = 0$$

$$a=1; b=8; c=15$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x_1 = \frac{-8 - 2}{2 \cdot 1} = \frac{-10}{2} = -5 \in \mathbb{R}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x_2 = \frac{-8 + 2}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3 \in \mathbb{R}$$

$$\text{deci } S = \{-5; -3\}$$

k) $a \circ b = (a+4)(b+4) - 4$ (1); $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ deci putem lua $a = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ înlocuim în relația (1) și

$$\text{obținem: } \frac{1}{3} \circ b = \left(\frac{1}{3} + {}^3_4 \right) (b+4) - 4 = \frac{13}{3} (b+4) - 4 \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{13}{3} (b+4) \in \mathbb{N} \text{ și } \frac{13}{3} (b+4) \geq 4 \text{ rezultă că}$$

$$b+4 = \frac{m(3;4)}{13} = \frac{24}{13} \Rightarrow b = \frac{24}{13} - {}^{13}_4 = \frac{24-52}{13} = -\frac{28}{13} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}; m(3;4) = \text{multiplu de 3 și 4}$$

$$\text{Verificăm: } \frac{1}{3} \circ \left(-\frac{28}{13} \right) = \left(\frac{1}{3} + {}^3_4 \right) \left(-\frac{28}{13} + {}^{13}_4 \right) - 4 = \frac{13}{3} \cdot \frac{24}{13} - 4 = 8 - 4 = 4 \in \mathbb{N}$$

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = x + y - 14$.

a) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x \circ x = 2$;

b) Să se demonstreze că legea " $\circ$ " este asociativă;

c) Să se demonstreze că $(\mathbb{R}; \circ)$ este grup comutativ.

Rezolvare:

$$a) \quad x \circ x = 2 \Leftrightarrow x + x - 14 = 2 \Leftrightarrow 2x = 16 \Leftrightarrow x = 8 \in \mathbb{R} \text{ deci } S = \{8\}$$

$$b) \text{ legea "}\circ\text{" este asociativă dacă } (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$(x \circ y) \circ z = (x \circ y) + z - 14 = (x + y - 14) + z - 14 = x + y + z - 28$$

$$x \circ (y \circ z) = x + (y \circ z) - 14 = x + (y + z - 14) - 14 = x + y + z - 28$$

Observăm că cele două rezultate sunt egale, deci $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$, adică legea " $\circ$ " este asociativă;

c) $(\mathbb{R}; \circ)$ este grup comutativ dacă legea " $\circ$ " este asociativă; comutativă, are element neutru și toate elementele lui $\mathbb{R}$ sunt simetrizabile în raport cu legea " $\circ$ ".

A: Conform b) legea " $\circ$ " este asociativă

C: legea " $\circ$ " este comutativă dacă $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$\left. \begin{aligned} x \circ y &= x + y - 14 \\ y \circ x &= y + x - 14 \end{aligned} \right\}$ observăm că cele două rezultate sunt egale, deoarece adunarea este comutativă în $\mathbb{R}$,

deci $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in \mathbb{R}$, adică legea " $\circ$ " este comutativă;

E: legea " $\circ$ " admite element neutru dacă există $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in \mathbb{R}$

legea " $\circ$ " este comutativă deci vom rezolva doar o ecuație pentru a găsi elementul neutru:

$x \circ e = x \Leftrightarrow x + e - 14 = x \Leftrightarrow e = x - x + 14 \Leftrightarrow e = 14 \in \mathbb{R}$ deci elementul neutru este $e = 14$.

S: trebuie să dem. că $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}$ a.î. $x \circ x' = x' \circ x = e$

legea " $\circ$ " este comutativă deci vom rezolva doar o ecuație:

$x \circ x' = e \Leftrightarrow x + x' - 14 = 14 \Leftrightarrow x' = -x + 28 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$, prin urmare toate elementele lui $\mathbb{R}$ sunt simetrizabile în raport cu legea " $\circ$ "

Din A, C, E, S rezultă că $(\mathbb{R}; \circ)$ este grup comutativ.

Exerciții propuse:

1) Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

a) Să se verifice dacă legea " $\circ$ " este asociativă; b) Să se verifice dacă legea " $\circ$ " este comutativă;

c) Să se determine elementul neutru față de legea " $\circ$ "; d) Să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea " $\circ$ "; e) Să se precizeze dacă $(\mathbb{R}; \circ)$ este grup sau monoid; f) Să se verifice că

$x \circ y = 2(x-3)(y-3) + 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$; g) Să se calculeze $x \circ 3$, unde x este un număr real;

h) Să se calculeze $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \dots \circ \sqrt{2009}$; i) Să se calculeze $2 \circ (-5); (-3) \circ (-1)$;

j) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile: $x \circ (-2) = 7$; $x \circ x = 11$; k) Să se determine $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{N}$

2) Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x * y = xy - 2(x+y) + 6$.

a) Să se verifice dacă legea " $*$ " este asociativă; b) Să se verifice dacă legea " $*$ " este comutativă;

c) Să se determine elementul neutru față de legea " $*$ "; d) Să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea " $*$ "; e) Să se precizeze dacă $(\mathbb{R}; *)$ este grup sau monoid; f) Să se verifice că

$x * y = (x-2)(y-2) + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$; g) Să se calculeze $x \circ 2$, unde x este un număr real;

h) Să se calculeze $(-2009) * (-2008) * \dots * (-1) * 0 * 1 * 2 * \dots * 2009$; i) Să se calculeze $3 * 5; (-7) * (-3)$;

j) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile: $x * 4 = -5$; $x * x = 6$; k) Să se determine $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{N}$

3) Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x \circ y = x + y - 3$ și

$x * y = (x-3)(y-3) + 3$.

a) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $x * x = x \circ x$;

b) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $x * a = 3, \forall x \in \mathbb{Z}$;

c) Să se demonstreze că $(\mathbb{Z}; \circ)$ este grup comutativ.