

Exerciții rezolvate:

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} (-5x^2 - 2x + 1) = -5 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = -5 + 2 + 1 = -2 \text{ (am înlocuit pe } x \text{ cu } -1 \text{)}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 - 9x + 7) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -(-\infty)^2 = -\infty \text{ (când } x \text{ tinde la } +\infty \text{ sau la } -\infty \text{ și funcția este polinomială, se reține doar termenul de grad cel mai mare și se înlocuiește } x \text{ cu } +\infty \text{ sau cu } -\infty \text{)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6}{x^2 - 3} = \frac{0 + 6}{0 - 3} = \frac{6}{-3} = -2 \text{ (am înlocuit pe } x \text{ cu } 0 \text{)}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 + 7x}{5x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2}{5x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5} \text{ (când } x \text{ tinde la } +\infty \text{ sau la } -\infty \text{ și funcția este raport de funcții polinomiale, se rețin doar termenii de grad cel mai mare, se fac simplificări și se înlocuiește } x \text{ cu } +\infty \text{ sau cu } -\infty \text{)}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2 - 4x + 1}{2x - 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{2} = -\frac{3}{2}(-\infty) = +\infty$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + 5}{x^2 + 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{x} = \frac{-4}{-\infty} = 0$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)^2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 3 - 3 = 0$$

am folosit formula

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{3x - 1}{x + 2} \right)^{\frac{x^2 - 25}{x - 5}} = \left(\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 1}{x + 2} \right)^{\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5}} = \left(\frac{14}{7} \right)^{\lim_{x \rightarrow 5} (x + 5)} = 2^{10}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x + 3)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$10. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{9x^2 - 7}{-13x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^2}{-13x^2} \right)^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}} = \left(-\frac{9}{13} \right)^{\frac{1}{\infty}} = \left(-\frac{9}{13} \right)^0 = 1 \text{ (am folosit } a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{)}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sin(x - 7)}{x^2 - 49} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sin(x - 7)}{x - 7} \cdot \frac{x - 7}{x^2 - 49} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sin(x - 7)}{x - 7} \cdot \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 7}{(x - 7)(x + 7)} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{x + 7} = \frac{1}{14}$$

am folosit formula $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$12. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\operatorname{tg}(x^2 - 16)}{\sin(x^2 - 5x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\operatorname{tg}(x^2 - 16)}{x^2 - 16} \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{\sin(x^2 - 5x + 4)} \cdot \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4} =$$

$$1 \cdot \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{(x - 4)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 4}{x - 1} = \frac{8}{3}$$

am folosit formula

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

dar și descompunerea trinomialului de gradul doi

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ unde } x_1, x_2 \text{ sunt soluțiile reale ale ecuației } ax^2 + bx + c = 0$$

Observație : vă reamintesc rezolvarea ecuației de gradul doi

$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$, are :

-două soluții reale $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ dacă $\Delta = b^2 - 4ac > 0$;

-o soluție reală $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ dacă $\Delta = b^2 - 4ac = 0$;

-nici o soluție reală dacă $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 5x)}{\ln(1 + \sin 3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 5x)}{\sin 5x} \cdot \frac{\sin 3x}{\ln(1 + \sin 3x)} \cdot \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{5x}{3x} = 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{7x} \cdot \frac{7x}{2x} = (\ln e) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{2x} = 1 \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{2} \quad (\text{am folosit faptul că } \ln e = 1 \text{ și vă reamintesc că } \ln 1 = 0)$$

$$15. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x+2|}{x+2} = \frac{0}{0} \text{ caz exceptat! În acest caz calculăm limite laterale:}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{-(x+2)}{x+2} = -1, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{x+2}{x+2} = 1; \text{ observăm că cele două limite laterale sunt diferite, rezultă că}$$

$$\text{nu există } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x+2|}{x+2}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + 5x}{|x|} = \frac{0}{0} \text{ caz exceptat! În acest caz calculăm limite laterale:}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-x^2 + 5x}{|x|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x(-x+5)}{-x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-x+5}{-1} = \frac{5}{-1} = -5$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-x^2 + 5x}{|x|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x(-x+5)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-x+5}{1} = \frac{5}{1} = 5$$

$$\text{cele două limite laterale sunt diferite, rezultă că nu există } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + 5x}{|x|}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{6}}{x - 3} = \frac{0}{0} \text{ caz exceptat! În acest caz folosim un artificiu de calcul – amplificăm cu conjugata expresiei cu radicali:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{6}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{6})(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{6})}{(x - 3)(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{6})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x^2 - x})^2 - (\sqrt{6})^2}{(x - 3)(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{6})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{(x - 3)(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{6})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 3)(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{6})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{6}} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

Am folosit formula

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

care se aplică și la “conjugata” expresiei cu radicali astfel:

$$\boxed{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b}$$

Expresiile $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ se numesc **expresii conjugate**.

Am folosit și descompunerea trinomialului de gradul doi:

$$x^2-x-6=0, \quad a=1; b=-1; c=-6$$

$$\Delta=b^2-4ac \Leftrightarrow \Delta=(-1)^2-4 \cdot 1 \cdot (-6) \Leftrightarrow \Delta=25>0, \text{ există soluții reale}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x_1=\frac{-(-1)+5}{2 \cdot 1}=\frac{6}{2}=3; \quad x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x_1=\frac{-(-1)-5}{2 \cdot 1}=\frac{-4}{2}=-2$$

Știm că $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ unde x_1, x_2 sunt soluțiile reale ale ecuației $ax^2+bx+c=0$ deci $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$.

18. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x+6}-\sqrt{x^2+2}) = \infty - \infty$ caz exceptat! În acest caz folosim un artificiu de calcul – amplificăm cu conjugata expresiei cu radicali:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x+6}-\sqrt{x^2+2}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+6}-\sqrt{x^2+2})(\sqrt{x^2+x+6}+\sqrt{x^2+2})}{1 \cdot (\sqrt{x^2+x+6}+\sqrt{x^2+2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+x+6)-(x^2+2)}{\sqrt{x^2+x+6}+\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4}{\sqrt{x^2(1+\frac{x}{x^2}+\frac{6}{x^2})}+\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x^2})}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1+\frac{4}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}}+|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1+\frac{4}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} \\ &= \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Am dat factor comun forțat atât la numărător cât și la numitor! (a da factor comun într-o expresie înseamnă a scrie factorul comun înmulțit cu o paranteză în care apar toți termenii din expresie împărțiți la factorul comun sub formă de fracții)

$$\begin{aligned} 19. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^3+8} \right) &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{12}{(x+2)(x^2-2x+4)} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-2x+4-12}{(x+2)(x^2-2x+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-2x-8}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-4}{x^2-2x+4} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

În paranteză am folosit formula

$$\boxed{a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)}$$

și am adus la același numitor fracțiile

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 7}}{-3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{5x}{x^2} + \frac{7}{x^2}\right)}}{-x \left(\frac{3x}{x} - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}}}{-x \left(3 - \frac{1}{x}\right)}$$

20.

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}}}{-x \left(3 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}}}{3 - \frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1 - 0 + 0}}{3 - 0} = \frac{1}{3}$$

Exerciții propuse:

1. $\lim_{x \rightarrow -2} (-3x^2 + 2x - 9) =$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^2 + 2x - 9) =$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (5x^2 - 7x - 3) =$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} =$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3}{x + 5} =$

6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5}{1 - x} =$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x}{3x^2 - 5x + 1} =$

8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{x^2+1} =$

9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+6x+1}{x+3} =$

10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} =$

11. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^2} =$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} 3^{\frac{x^2+1}{3x^2-2x+5}} =$

13. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{3x+2} \right)^{\frac{x^2-1}{x-1}} =$

14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2}{5x^2+1} \right)^{\frac{1}{x}} =$

15. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} =$

16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(5x)} =$

17. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x^2 - 3x + 2} =$

18. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\arcsin(x-3)}{x^2 - 9} =$

19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x^2-1)}{\sin(x^2-4x+3)} =$

20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ex)}{x} =$

21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\ln(1+\sin 2x)} =$

22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{3x} =$

23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{5x} =$

24. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - 4}{x - 2} =$

25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x}{2}} - 1}{x} =$

26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} =$

27. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1} =$

28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{|x|} =$

29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} =$

30. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{2}}{x-1} =$

31. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2+1}) =$

32. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1}) =$

33. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) =$

34. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-4} \right) =$

35. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+1}}{-2x+5} =$

36. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+x}}{3x+1} =$

37. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)} \right) =$