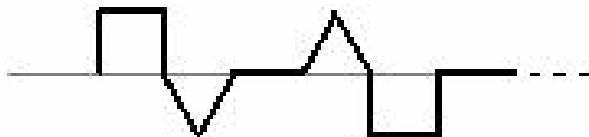


CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A IX A

1. Pe o dreaptă se consideră 2010 puncte, care formează 2009 segmente, fiecare de 1 cm. Pe primul segment, deasupra drepte, construim un pătrat, pe al doilea segment, dedesubtul drepte, construim un triunghi echilateral, apoi trasăm segmentul de lungime 1 cm. Pe al patrulea segment construim un triunghi echilateral, deasupra drepte, pe următorul segment, construim un pătrat, dedesubtul drepte și din nou trasăm următorul segment de lungime 1 cm (ca în desenul de mai jos). Repetăm procedeul până ajungem la ultimul punct. Calculați lungimea liniei frânte obținute de la primul până la ultimul punct.



2. Considerăm șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $a_1 = \sqrt{3}$ și $a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + \frac{2n}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$, $n \geq 1$.

a) Arătați că șirul $(b_n)_{n \geq 1}$, definit prin $b_n = a_n \sqrt{3} - n$, este o progresie geometrică.

b) Arătați că $a_n = \frac{n}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Notăm $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, demonstrați că $S_n \sqrt{3} - \frac{n(n+1)}{2} < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

3. În triunghiul ABC cu $BC = 1$ și înălțimea $AD = h$, $D \in [BC]$ se înscrie dreptunghiul MNPQ, $M \in [AB]$, $N \in [AC]$, $P, Q \in [BC]$. Notăm $MN = x$ și $NP = y$.

a) Demonstrați că are loc egalitatea: $hx + ay = ah$.

b) Arătați că aria dreptunghiului MNPQ este cel mult jumătate din aria triunghiului ABC.

c) Considerăm o bucată de carton în formă de triunghi cu laturile egale cu 30 cm, 40 cm și 50 cm. Determinați dimensiunile dreptunghiurilor de arie maximă care pot fi decupate din acest carton.

4. Fie funcția $f: \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 3}$. Determinați punctele situate pe graficul funcției f care au ordonata un număr întreg.

Notă: Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

1. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1$;

b) $\sqrt{\frac{x+2}{3-x}} + \sqrt{\frac{3-x}{x+2}} = \frac{5}{2}$.

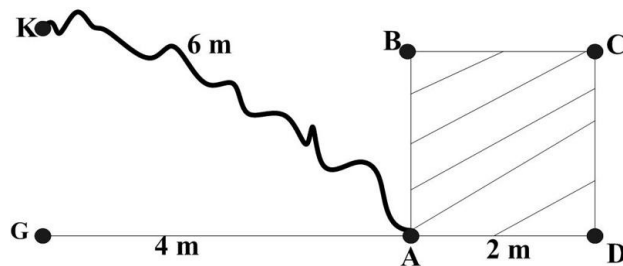
2.

a) Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + x$ este strict monotonă.

b) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $2^a - 2^b = b - a$. Arătați că $a = b$.

c) Rezolvați ecuația $2^{\sin^2 x} - 2^{\cos^2 x} = \cos 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

3. O capră este legată cu un lanț având lungimea de 6m, lanț care este fixat cu unul dintre capete în punctul A. AG este un gard cu lungimea de 4m pe care capra nu poate să-l sară. Pătratul ABCD este un țarc cu latura de 2m în care capra nu poate intra (vezi figura). Calculați aria suprafeței maxime de iarbă pe care capra poate paște (gardul și laturile țarcului au lățimi neglijabile, iar aria unui cerc este πr^2 , unde r este raza cercului).



4. Un număr natural se numește „bun” dacă el poate fi scris atât ca suma a două numere naturale consecutive, cât și ca suma a trei numere naturale consecutive.

Demonstrați că:

a) 2010 nu este „bun”, dar 2013 este „bun”.

b) Produsul a două numere „bune” este „bun”.

c) Dacă produsul a două numere este „bun” atunci cel puțin unul dintre ele este „bun”.

Notă: Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

1.

a) Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Arătați că:
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz).$$

b) Fie matricea $A \in M_3(\mathbb{R})$ având toate elementele pozitive cu proprietatea că elementele de pe diagonala principală sunt egale între ele, iar produsul elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană este egal cu 1. Arătați că $\det A \geq 0$.

2. Spunem că o matrice are proprietatea (p) dacă toate elementele sale sunt egale cu -1 sau 1, iar produsul elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană este egal cu -1.

a) Dați un exemplu de matrice $A \in M_3(\mathbb{Z})$ cu proprietatea (p).

b) Demonstrați că nu există nici o matrice $B \in M_{2 \times 3}(\mathbb{Z})$ cu proprietatea (p).

3.

a) Determinați intervalele de monotonie ale funcției:

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + \frac{16}{x}.$$

b) Se construiește un rezervor din sticlă în formă de paralelipiped dreptunghic cu baza pătrat și fără capac, având volumul egal cu $4m^3$. Determinați dimensiunile paralelipipedului astfel încât suprafața de sticlă utilizată să fie minimă.

4. Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{a - 2\sqrt{2-x}}{x-1}, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ bx + c \ln(x-1), & x > 1 \end{cases} \quad \text{să fie continuă pe mulțimea } \mathbb{R}.$$

Notă: Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

1.

- a) Pe mulțimea $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție $*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prin $x * y = xy - x - y + 2$. Arătați că legea $*$ este comutativă și asociativă.
- b) Pe tablă sunt scrise numerele $-2010, -2009, \dots, 0, 1, \dots, 2010$. Se șterg două numere a și b și, în locul lor, se scrie numărul $ab - a - b + 2$. Se continuă acest procedeu până când pe tablă rămâne un singur număr. Care este acest număr?

2. Calculați:
$$I = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{dx}{(x+1)(2x^2+1)}.$$

3. Considerăm mulțimea $F = \{f: [0,1] \rightarrow [0,1], f \text{ continuă}, f(0)=0 \text{ și } f(1)=1\}$.

a) Fie $a, b \in [0,1]$, $a < b$ și funcția $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, a] \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 1, & x \in [b, 1] \end{cases}$.

Arătați că $f \in F$ și calculați $\int_0^1 f(x) dx$.

b) Găsiți două funcții $f_1, f_2 \in F$, $f_1 \neq f_2$ astfel încât $\int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 f_2(x) dx$.

c) Găsiți o funcție $f \in F$ astfel încât $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2010}$.

4. La un turneu de șah au participat 20 de elevi. Fiecare a jucat câte o partidă cu fiecare. După terminarea turneului s-a constatat că exact un elev s-a clasat pe locul al 19-lea obținând 9,5 puncte.

- a) Câte partide s-au jucat la acel turneu în total?
- b) Arătați că ultimul elev are cel mult 0,5 puncte.
- c) Poate elevul clasat pe primul loc să-l depășească cu un punct pe al doilea clasat?
(Se acordă 1p pentru victorie, 0,5p pentru meci egal și 0p pentru înfrângere)

Notă: Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7