

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010**

**Filiera tehnologică : profil tehnic**

**CLASA A IX A**

**1.** Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4x - x^2$ .

- a)** Determinați coordonatele punctelor în care graficul taie axa  $Ox$ .
- b)** Determinați coordonatele vârfului parabolei (P) asociate funcției.
- c)** Notând cu  $S$  aria mulțimii din plan delimitate de parabola (P) și axa  $Ox$ , arătați că:  $8 < S < 16$ .

**2.**

- a)** Determinați cel mai mare număr întreg  $k$  pentru care  $2x^2 - 3x + 1 \geq k$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;
- b)** Găsiți numerele întregi  $x$  pentru care  $(2x^2 - 3x + 1)^2 \leq 14x^2 - 21x + 1$ .

**3.** Nicu are plantați în livadă  $n$  pruni, numerotați distinct cu numerele  $1, 2, 3, \dots, n$ . Într-o zi, Nicu se apucă de cules prune respectând următoarea regulă: din prunul cu numărul 1 culege două prune, din prunul cu numărul 2, culege cinci prune, din prunul cu numărul 3, opt prune, și așa mai departe, culegând cu trei prune mai mult decât din pomul precedent.

- a)** Ce număr de prune a cules din copacul cu numărul zece?
- b)** Câți pruni ar trebui să aibă plantați Nicu pentru a fi sigur că, respectând regula indicată, la sfârșitul zilei are cules cel puțin 2010 prune?

**4.** Pe fiecare dintre laturile (AB), (BC) și (CA) ale unui triunghi ABC se consideră câte trei puncte, două colorate cu roșu și unul cu albastru.

- a)** Calculați câte triunghiuri au vârfurile printre cele nouă considerate.
- b)** Determinați câte dintre acestea au vârfurile colorate cu aceeași culoare.

**Notă:** Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010**

**Filiera tehnologică : profil tehnic**

**CLASA A X A**

**1.**

a) Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația  $z^2 - 2 \cos t \cdot z + 1 = 0$ ,  $t \in [0, 2\pi)$ .

b) Dacă  $z \in \mathbb{C}^*$  astfel încât  $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$  calculați  $z^4 + \frac{1}{z^4}$  și  $z^8 + \frac{1}{z^8}$ .

c) Calculați  $z^{1024} + \frac{1}{z^{1024}}$  știind că  $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$ .

**2.**

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:  $\sqrt[3]{2 \cdot 3^x - 7} + \sqrt[3]{3^x - 2} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^x - 2} + \sqrt[3]{3^x - 7}$  utilizând, eventual, formula  $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ .

b) Găsiți  $n$  și termenul care conține pe  $x^{-1}$  din dezvoltarea  $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  știind că suma coeficienților primilor trei termeni este 36.

**3.** Într-un sistem de axe de coordonate se consideră punctele  $A(3, 0)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $M(3, -3)$  și  $N(-2, 2)$ .

a) Găsiți ecuația dreptei  $MB$ .

b) Arătați că  $AN$ ,  $BM$  și perpendiculara din  $O$  pe  $AB$  sunt concurente.

**4.** Dintr-o urnă care conține mai mult de 10 bile ,colorate în verde sau roșu, un elev extrage bile până când constată că ,pentru prima dată, numărul de bile verzi extrase este egal cu numărul de bile roșii extrase. Elevul constată că acest lucru este îndeplinit după a zecea bilă extrasă și că nu există trei bile de aceeași culoare extrase consecutiv.

Demonstrați că :

a) Dacă ultima bilă extrasă este verde, atunci și penultima este tot verde, iar antipenultima este roșie.

b) A cincea și a șasea bilă extrase au culori diferite.

**Notă:** Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010**

**Filiera tehnologică : profil tehnic**

**CLASA A XI A**

**1.** Fie  $M = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A \in \{-1, 1\}\}$ .

- a) Arătați că  $M$  conține măcar 2 elemente.
- b) Justificați faptul că în  $M$  există cel puțin 2010 elemente.
- c) Demonstrați că, dacă  $A, B \in M$ , atunci  $A \cdot B \in M$ .

**2.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a, & x \in (-\infty, 1) \\ b, & x = 1 \\ x^2 + cx, & x \in (1, \infty) \end{cases}$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{R}$

- a) Arătați că există numere  $a, b, c$  astfel încât funcția de mai sus să fie continuă.
- b) Să se determine toate valorile  $a, b, c$  pentru care  $f$  este derivabilă pe întreg domeniul de definiție.

**3.** Se numește cod de lungime 9 o matrice  $M$  de tip  $3 \times 3$  care are drept elemente doar cifre nenule astfel încât fiecare cifră apare o singură dată.

- a) Să se arate că există măcar 2 coduri  $M$  de lungime 9 pentru care  $\det M = 0$ .
- b) Determinați numărul total de coduri de lungime 9.
- c) Există coduri  $M$  de lungime 9 pentru care  $\det M$  este nenul și multiplu de 3?

**4.** Un drum este realizat de 2 constructori numiți  $A$  și  $B$ . Constructorul  $A$  realizează porțiunea de drum numită  $f$ , iar  $B$  realizează porțiunea de drum numită  $g$ . Se știe că  $f : [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$  și  $g : [2\pi, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$f(x) = \sin x$  și  $g(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- a) Un autovehicul se deplasează din punctul  $M(0, 0)$  către punctul  $N(2\pi, 0)$ , pe drumul construit de  $A$ . Știind că autovehiculul se deplasează cu viteză constantă, să se identifice punctul în care asupra autovehiculului nu acționează forța centrifugă (forța care "împinge" autovehiculul în exteriorul curbei). Argumentați.
- b) Să se determine  $a$  și  $b$  astfel încât cei 2 constructori să poată "lipi" cele două drumuri astfel încât o mașină să poată parcurge întregul drum astfel format.

**Notă:** Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010**

**Filiera tehnologică : profil tehnic**

**CLASA A XII A**

1. Fie  $G = \left\{ M \in M_3(\mathbb{R}) / M = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$ .

- a) Să se arate că  $\forall M_1, M_2 \in G$ , rezultă că  $M_1 \cdot M_2 \in G$ .
- b) Să se determine o matrice  $F \in G$  cu proprietatea ca  $M \cdot F = F \cdot M = F, \forall M \in G$ .
- c) Să se determine o matrice  $E \in G$  astfel încât  $M \cdot E = E \cdot M = M, \forall M \in G$

2. Fie  $f : \left[0, \frac{4}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, x \in [0, 1] \\ x^2 - 2x + 2, x \in \left[1, \frac{4}{3}\right] \end{cases}$

- a) Arătați că  $f$  e continuă pe  $\left[0, \frac{4}{3}\right]$ .
- b) Calculați o primitivă pentru funcția  $f$ .
- c) Să se calculeze volumul "clopotului" format prin rotirea graficului funcției  $f$  în jurul lui  $Ox$ .

3. Fie polinomul  $P = X^4 + aX^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ .

- a) Să se arate că pentru  $a = -4$ , polinomul de mai sus are toate rădăcinile reale.
- b) Să se descompună  $P$  în factori ireductibili (în  $\mathbb{R}[X]$ ) pentru  $a = 1$ .

4. Fie  $f : [0, \pi] \rightarrow [0, 1], f(x) = \sin x$ .

- a) Să se demonstreze ca  $f$  este concavă.
- b) Să se demonstreze ca lungimea graficului lui  $f$  este mai mare decât  $\sqrt{\pi^2 + 4}$ .

**Notă:** Timp de lucru 3 ore  
Toate subiectele sunt obligatorii  
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7