

Clasa XI – M2 – prof. Cornelia Mestecan**Calculul derivatelor de ordin II pentru funcțiile studiate****Fișă de lucru**

Definiție: Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$, o funcție derivabilă și $a \in D$ punct de acumulare pentru D .

Dacă f' este derivabilă în punctul a , vom spune că f este de două ori derivabilă în a și vom scrie

$f''(a) = (f')'(a)$. Dacă f' este derivabilă pe D , vom scrie $f'' = (f')'$ sau $f^{(2)} = (f')'$ și vom spune că f este de două ori derivabilă pe D .

Observații:

1. pentru calculul derivatei de ordinul al doilea în punctul a , folosim egalitatea:

$$f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

2. orice funcție elementară este derivabilă de două ori pe domeniul ei de derivabilitate.

Exerciții rezolvate:

Să se calculeze derivatele de ordinul doi ale funcțiilor, scriindu-se de fiecare dată și formulele utilizate:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^5 - x^3 + 2x - 1$; b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -(x+1)^{2009} - (x-2)^5 + 2(x+3) - 15$;

c) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-2}{x+1}$; d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2}$; e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2+9)e^x$;

f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2+5}$; g) $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln \frac{1}{x}$; h) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x + 5ex$;

i) $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 2 \ln x$; j) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3^x + 5^x$;

k) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 \sin x - 2 \cos x$; l) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (-x+2) \sin x$;

m) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 \arctg x$; n) $f : (-5; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+5}$

Rezolvare:

a) $f'(x) = (4x^5 - x^3 + 2x - 1)' = 20x^4 - 3x^2 + 2$; $f''(x) = (f'(x))' = (20x^4 - 3x^2 + 2)' = 80x^3 - 6x$;

am folosit formulele: $(f+g)' = f' + g'$; $(c \cdot f)' = c \cdot f'$; $c' = 0$; $x' = 1$; $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$$f'(x) = (-(x+1)^{2009} - (x-2)^5 + 2(x+3) - 15)'$$

b) $= -2009(x+1)^{2008} \cdot (x+1)' - 5(x-2)^4 \cdot (x-2)' + 2(x+3)' - 15'$;

$$= -2009(x+1)^{2008} - 5(x-2)^4 + 2$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (-2009(x+1)^{2008} - 5(x-2)^4 + 2)'$$

$$= -2009 \cdot 2008(x+1)^{2007} \cdot (x+1)' - 5 \cdot 4(x-2)^3 \cdot (x-2)' + 2'$$

$$= -2009 \cdot 2008(x+1)^{2007} - 20(x-2)^3$$

am folosit formulele: $(f+g)' = f' + g'$; $(c \cdot f)' = c \cdot f'$; $c' = 0$; $x' = 1$; $(u^n(x))' = n \cdot u^{n-1}(x) \cdot u'(x)$

c) $f'(x) = \left(\frac{x-2}{x+1} \right)' = \frac{(x-2)'(x+1) - (x-2)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x-2}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$;

Clasa XI – M2 – prof. Cornelia Mestecan
Calculul derivatelor de ordin II pentru funcțiile studiate
Fișă de lucru

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{3}{(x+1)^2} \right)' = \frac{3' \cdot (x+1)^2 - 3 \cdot ((x+1)^2)'}{(x+1)^2)^2} = \frac{-3 \cdot 2(x+1)(x+1)'}{(x+1)^4} = \frac{-6}{(x+1)^3}$$

am folosit formulele: $\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$; $(u^n(x))' = n \cdot u^{n-1}(x) \cdot u'(x)$;

$$(f+g)' = f' + g'; c' = 0; x' = 1;$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2-1}{x^2+2} \right)' = \frac{(x^2-1)'(x^2+2) - (x^2-1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2} = \frac{2x(x^2+2) - (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2+2)^2}; \\ d) \quad &= \frac{2x^3 + 4x - 2x^2 + 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{6x}{(x^2+2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = \left(\frac{6x}{(x^2+2)^2} \right)' = \frac{(6x)' \cdot ((x^2+2)^2) - 6x((x^2+2)^2)'}{((x^2+2)^2)^2} \\ &= \frac{6(x^2+2)^2 - 6x \cdot 2(x^2+2)(x^2+2)'}{(x^2+2)^4} = \frac{6(x^2+2)^2 - 24x^2(x^2+2)}{(x^2+2)^4} = \frac{6(x^2+2)(x^2+2-24x^2)}{(x^2+2)^4} \\ &= \frac{6(-23x^2+2)}{(x^2+2)^3} \end{aligned}$$

am folosit formulele: $\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$; $(u^n(x))' = n \cdot u^{n-1}(x) \cdot u'(x)$; $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;

$$(f+g)' = f' + g'; c' = 0; x' = 1;$$

$$e) \quad f'(x) = ((x^2+9)e^x)' = (x^2+9)'e^x + (x^2+9)(e^x)' = 2xe^x + (x^2+9)(e^x) = e^x(x^2+2x+9);$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = (e^x(x^2+2x+9))' = (e^x)'(x^2+2x+9) + e^x(x^2+2x+9)' \\ &= e^x(x^2+2x+9) + e^x(2x+2) = e^x(x^2+4x+11) \end{aligned}$$

am folosit formulele: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$; $(f+g)' = f' + g'$; $(c \cdot f)' = c \cdot f'$; $c' = 0$; $x' = 1$;

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}; (e^x)' = e^x$$

$$f) \quad f'(x) = (e^{x^2+5})' = e^{x^2+5} \cdot (x^2+5)' = 2xe^{x^2+5};$$

Clasa XI – M2 – prof. Cornelia Mestecan
Calculul derivatelor de ordin II pentru funcțiile studiate
Fișă de lucru

$$f''(x) = (f'(x))' = (2xe^{x^2+5})' = (2x)'e^{x^2+5} + 2x(e^{x^2+5})' = 2e^{x^2+5} + 2x(e^{x^2+5})(x^2+5)' \\ = 2e^{x^2+5} + 4x^2(e^{x^2+5}) = (4x^2+2)e^{x^2+5}$$

am folosit formulele: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$; $(f+g)' = f' + g'$; $(c \cdot f)' = c \cdot f'$; $c' = 0$; $x' = 1$;

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}; (e^{u(x)})' = e^{u(x)} \cdot u'(x)$$

$$g) f'(x) = \left(\ln \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = x \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}; f''(x) = (f'(x))' = \left(-\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1' \cdot x - 1 \cdot x'}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

am folosit formulele: $(\ln u(x))' = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$; $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$; $c' = 0$; $x' = 1$

$$h) f'(x) = (e^x + 5ex)' = (e^x)' + (5ex)' = e^x + 5e; f''(x) = (f'(x))' = (e^x + 5e)' = (e^x)' + (5e)' = e^x$$

am folosit formulele: $(f+g)' = f' + g'$; $(c \cdot f)' = c \cdot f'$; $(e^x)' = e^x$; $c' = 0$; $x' = 1$

$$i) f'(x) = (x + 2 \ln x)' = x' + (2 \ln x)' = 1 + \frac{2}{x} = \frac{x+2}{x};$$

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{x+2}{x}\right)' = \frac{(x+2)' \cdot x - (x+2)x'}{x^2} = \frac{x - x - 2}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$$

am folosit formulele: $(f+g)' = f' + g'$; $(c \cdot f)' = c \cdot f'$; $c' = 0$; $x' = 1$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$j) f'(x) = (3^x + 5^x)' = (3^x)' + (5^x)' = 3^x \ln 3 + 5^x \ln 5;$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (3^x \ln 3 + 5^x \ln 5)' = (\ln 3)(3^x)' + (\ln 5)(5^x)' = (\ln 3)^2 (3^x) + (\ln 5)^2 (5^x)$$

am folosit formulele: $(f+g)' = f' + g'$; $(c \cdot f)' = c \cdot f'$; $(a^x)' = a^x \ln a$

$$k) f'(x) = (3 \sin x - 2 \cos x)' = (3 \sin x)' - (2 \cos x)' = 3 \cos x + 2 \sin x;$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (3 \cos x + 2 \sin x)' = -3 \sin x + 2 \cos x$$

am folosit formulele: $(f+g)' = f' + g'$; $(c \cdot f)' = c \cdot f'$; $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$

$$l) f'(x) = ((-x+2) \sin x)' = (-x+2)' \sin x + (-x+2)(\sin x)' = -\sin x + (-x+2)(\cos x);$$

Fișă de lucru

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = ((-x+2)(\cos x))' = (-\sin x)' + ((-x+2)(\cos x))' \\ &= -\cos x + (-x+2)'(\cos x) + (-x+2)(\cos x)' = -\cos x - \cos x - (-x+2)\sin x \\ &= -2\cos x - (-x+2)\sin x \end{aligned}$$

am folosit formulele: $(f+g)' = f' + g'$; $(c \cdot f)' = c \cdot f'$; $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$; $(\sin x)' = \cos x$;
 $(\cos x)' = -\sin x$; $c' = 0$; $x' = 1$;

$$\text{m) } f'(x) = (3\arctg x)' = \frac{3}{1+x^2}; \quad f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{3}{1+x^2} \right)' = \frac{3' \cdot (1+x^2) - 3(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{-6x}{(1+x^2)^2}$$

am folosit formulele: $(c \cdot f)' = c \cdot f'$; $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$; $\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$;

$$c' = 0; \quad x' = 1; \quad (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$\text{n) } f'(x) = (\sqrt{x+5})' = \frac{1}{2\sqrt{x+5}} \cdot (x+5)' = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+5}} \right)' = \frac{1' \cdot (2\sqrt{x+5}) - 1 \cdot (2\sqrt{x+5})'}{(2\sqrt{x+5})^2} = \frac{-\frac{2}{2\sqrt{x+5}} \cdot (x+5)'}{4(x+5)} = -\frac{1}{4(x+5)\sqrt{x+5}}$$

am folosit formulele: $(\sqrt{u(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$; $c' = 0$; $x' = 1$

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'; \quad \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Exerciții propuse:

Să se calculeze derivatele de ordinul doi ale funcțiilor, scriindu-se de fiecare dată și formulele utilizate:

$$\text{a) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x^5 + 12x + 5; \quad \text{b) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2(x-6)^{2010} + (x+3)^5 - 2(x-1) - 1;$$

$$\text{c) } f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+3}{x-1}; \quad \text{d) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+1}; \quad \text{e) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2-3)e^x;$$

$$\text{f) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2-2}; \quad \text{g) } f: (-3; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x+3); \quad \text{h) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - 2ex;$$

$$\text{i) } f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 5\ln x; \quad \text{j) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x - 7^x;$$

$$\text{k) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 9\sin x + 4\cos x; \quad \text{l) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (4x-3)\cos x;$$

$$\text{m) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2\arctg x; \quad \text{n) } f: (4; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x-4}$$