

Definiții

Definiție 1.

Fie mulțimea $I_{mn} = \{(i, j) / 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$. O funcție $A: I_{mn} \rightarrow K$ (K fiind una din mulțimile $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) se numește matrice de tipul (m, n) . Valorile $A(i, j)$ se notează a_{ij} și se numesc elementele matricei. Numărul i se numește indice de linie, iar j se numește indice de coloană. Matricea A se scrie sub forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ adică un tablou cu } m \text{ linii și } n \text{ coloane. Notăție prescurtată } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Notăm cu $M_{mn}(K) = \text{mulțimea matricelor de tipul } (m, n) \text{ cu elemente în } K$ și cu $M_n(K) = \text{mulțimea matricelor pătrate de ordinul } n \text{ cu elemente în } K$.

Observații:

-o matrice cu o singură linie se numește *matrice linie*, ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ -matrice de tipul $(1, 3)$

-o matrice cu o singură coloană se numește *matrice coloană*, ex: $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ -matrice de tipul $(4, 1)$

-matricea cu toate elementele zero se numește *matrice nulă* și se notează cu O_{mn} ($O_{nn} = O_n$)

Ex: $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - matricea nulă de ordinul 2 sau $O_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ -matricea nulă de tipul $(3, 2)$

-matricea în care pe diagonala principală este 1 ($a_{ii} = 1, i = 1, 2, 3, \dots, n$) și în rest este 0, se numește *matricea unitate de ordinul n* și se notează cu I_n .

Ex: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - matricea unitate de ordinul 3.

Definiție 2.

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{mn}(K)$. Matricea ${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{nm}(K)$, se numește

transpusa matricei A. (Se observă că transpusa se obține prin schimbarea liniilor în coloane sau a coloanelor în linii).

Ex: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ atunci matricea transpusă este ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$.

Definiție 3.

Două matrice sunt egale dacă sunt de același tip și au toate elementele respectiv egale.
Definiție 4.

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{mn}(K)$, numim *opusa matricei A*, matricea

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exerciții:

1. Scrieți transpusele matricelor : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -9 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Determinați numerele reale x, y, z pentru care matricele următoare sunt egale:
 $A = \begin{pmatrix} 2 & x+3 \\ -y+2 & 3z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Operații cu matrice

Adunarea a două matrice. Înmulțirea unei matrice cu un scalar

Definiție

Fie matricele $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{mn}(K)$ și $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{mn}(K)$. Suma lor este matricea

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{mn}(K),$$

iar produsul dintre scalarul $k \in K$ și matricea A este matricea

$$kA = (ka_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{mn}(K).$$

Diferența matricelor A și B este $A - B = A + (-B)$.

Exerciții:

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați matricele:
 $2A$; $A + B$; $2A + 3B$; $A - B$; $2A - 3B$; $-5B$; $B + A$; $A + O_3$; $(A + B) - 2A$.

Înmulțirea a două matrice

Definiție

Fie matricele $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{mn}(K)$ și $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} \in M_{np}(K)$, adică

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}. \text{ Produsul lor notat cu } AB \text{ este matricea}$$

$$C = (c_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq p}} \in M_{mp}(K) \text{ unde}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{n2} \\ &\vdots \\ c_{1p} &= a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \dots + a_{1n}b_{np} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observație: pentru a se putea înmulți două matrice, trebuie ca numărul de coloane de la prima matrice să fie egal cu numărul de linii de la a doua matrice!!!! Matricea produs are numărul de linii egal cu numărul de linii al primei matrice și numărul de coloane egal cu numărul de coloane al celei de-a doua matrice.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matrice de tipul (2,3), $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrice de tipul (3,2)

Matricea produs $C = AB$ va fi de tipul (2,2), $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

$c_{11} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) + (-3) \cdot 0 = 1 + 0 + 0 = 1$ **am înmulțit** elementele de pe prima linie din A cu elementele de pe prima coloană din B astfel: primul cu primul + al doilea cu al doilea + al treilea cu al treilea,

$$c_{12} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) = 2 + 0 + 3 = 5$$

$$c_{21} = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 = -1 - 3 + 0 = -4$$

$$c_{22} = (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -2 + 1 - 2 = -3$$

Deci $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

În cazul nostru se poate calcula și BA pentru că este îndeplinită condiția: B de tipul (3,2) și A de tipul (2,3), rezultă $D = BA$ de tipul (3,3)

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} d_{11} &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1 - 2 = -1 & d_{21} &= (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -3 - 1 = -4 \\ d_{12} &= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 0 + 2 = 2 & d_{22} &= (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0 + 1 = 1 \\ d_{13} &= 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 = -3 + 4 = 1 & d_{23} &= (-3) \cdot (-3) + 1 \cdot 2 = 9 + 2 = 11 \end{aligned}$$

Clasa XI – M2 – prof. Cornelia Mestecan**Fișă de lucru - Matrice**

$$\begin{aligned}
 d_{31} &= 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 0 + 1 = 1 \\
 d_{32} &= 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 0 - 1 = -1 \\
 d_{33} &= 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 = 0 - 2 = -2
 \end{aligned}
 \quad \text{deci } D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 11 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Observație: în general $AB \neq BA$, adică înmulțirea matricelor nu este comutativă!!!**Exerciții:**

1. Fie matricele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Se cere: a) determinați tipul matricelor

b) determinați matricele AB ; BA ; $AB + BA$; $AC - CA$; $CD + DA$; $2BC - 3DC$ c) determinați matricele A^2 ; $B^2 - C^2$; D^3 unde $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n$ 2. Să se calculeze $f(A)$, știind că :

a) $f(A) = 2A^2 - I_2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $f(A) = A^2 - 3A + 5I_2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

c) $f(A) = A^2 + 2A - 6I_3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că $AB = BA$ și $A^2 = 4A$.

4. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ a & b \end{pmatrix}$. Aflați a și b astfel încât $AX = XA$.

5. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & 1-a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați A^2 și aflați $(a+b)A - A^2$;b) Determinați o matrice X astfel încât $XA = I_3$