

Prof. Mestecan Cornelia

Fișă de exerciții - Polinoame - Clasa a XII-a

1. Discutați gradul polinomului f în funcție de parametrul m :

a) $f = m(m-1)X^3 + mX^2 + 2X + m$

b) $f = 5 + 4X^2 + (m-3)X^3 + (m^2-9)X^4$

c) $f = (m^2 + m + 1)X^3 + (m + 2)X^2 + \hat{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$

d) $f = (m^6 + \hat{6})X^4 + (m^2 + \hat{2}m + \hat{6})X^3 + (m + \hat{5})X + \hat{2} \in \mathbb{Z}_7[X]$

2. Calculați $f(1), f(-1), f(\sqrt{2}), f(-\sqrt{2}), f(1+\sqrt{3}), f(1-\sqrt{3})$

a) $f = X^3 - 3X^2 + 2X - 1$, b) $f = -X^4 + X^3 - X^2 + 2X + 1$

3. Fie polinomul $f = X^3 + 6X^2 + 9X + 4$. Care din numerele $-1, 2, -4, 0$, este rădăcină a polinomului f

4. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$.

5. Aflați rădăcinile polinoamelor $f \in \mathbb{Q}[X]$: a) $f = 3X + 4$, b) $f = X^2 + 4X + 3$; c) $f = X^3 + X - 2$

d) $f = X^4 - 16$

6. Să se determine rădăcinile polinomului $f = X^2 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_5[X]$

7. Calculați $f+g, f-g, 3f+2g, f \cdot g$: a) $f = -X^4 + X^3 - X^2 + 2X + 1$, $g = X^3 - 3X^2 + 2X - 1$;

b) $f = 2X^3 + 3X^2 - 5X + 1$, $g = -2X^3 - 3X^2 + 2X - 1$; c) $f = X^3 - X^2 + 2X - 5$, $g = -X^2 + 3X - 2$

8. Determinați polinoamele $f+g, \hat{2}f-g, f \cdot g$: a) $f = X^2 + X + \hat{1}$, $g = X + \hat{2}$, $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$

b) $f = \hat{2}X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$, $g = \hat{3}X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{3}$, $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$

9. Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g , folosind algoritmul împărțirii:

a) $f = X^4 + 6X^3 + 8X^2 + 1$, $g = X^3 - X + 1$, $f, g \in \mathbb{Q}[X]$

b) $f = 2X^3 - 3X^2 + 5X + 1$, $g = X^2 - 2X + 1$, $f, g \in \mathbb{Q}[X]$

c) $f = X^2 + X + \hat{1}$, $g = X + \hat{2}$, $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$; d) $f = \hat{2}X^3 + X^2 + \hat{3}X + \hat{2}$, $g = \hat{3}X + \hat{2}$, $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$

10. Deîmpărțitul este $f = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$, restul este $r = -2X \in \mathbb{Q}[X]$, iar câtul este $c = X^2 + 2X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Aflați împărțitorul.

11. Să se determine un polinom de gradul 3 cu coeficienți raționali, care la împărțirea cu $X^2 - 5X + 6$ dă restul $2X - 1$, iar la împărțirea cu $X^2 + 1$ dă restul $X - 2$.

12. Să se determine parametrul m astfel încât polinomul

$f = \hat{5}X^3 + (m + \hat{1})X^2 + \hat{3}m + \hat{2} \in \mathbb{Z}_7[X]$, $m \in \mathbb{Z}_7$ împărțit la $g = X + \hat{4} \in \mathbb{Z}_7[X]$ să dea restul $r = \hat{2} \in \mathbb{Z}_7[X]$.

13. Să se determine a și b astfel încât g divide pe f , dacă:

a) $f = 2X^4 - 3X^3 + aX + b$, $g = X^2 - 2X + 3$, $f, g \in \mathbb{Q}[X]$

b) $f = X^4 + 1$, $g = X^2 + aX + b$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$

c) $f = X^4 + X^3 + X^2 + aX + b$, $g = X^2 + X + \hat{4}$, $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$

14. Folosind teorema lui Bézout, să se determine valorile parametrilor din problemele următoare:

a) $f = X^4 + 2X^2 + m$ se divide cu $g = X + 1$, $f, g \in \mathbb{Q}[X]$

b) $f = X^2 + mX - 10$ se divide cu $g = X - m$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$

c) $f = X^5 + X^3 + aX^2 + \hat{1}$ se divide cu $g = X + \hat{2}$, $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$

d) $f = X^4 + X^3 + aX + \hat{1}$ se divide cu $g = \hat{2}X + \hat{1}$, $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$

Prof. Mestecan Cornelia

Fișă de exerciții – Polinoame - Clasa a XII-a

15. Să se descompună în produse de factori ireductibili peste corpurile comutative

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ polinoamele: a) $f = X^5 + X^4 - X^3 - X^2 - 2X - 2$, b) $f = X^4 + X^2 + 1$, c) $f = X^4 + 3X^2 + 2$, d) $f = X^8 - 1$.

16. Descompuneți în produs de factori ireductibili peste corpul comutativ $\mathbb{Z}_3$, polinomul

$$f = X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{2}, \quad f \in \mathbb{Z}_3[X]$$

17. Descompuneți în produs de factori ireductibili peste corpul comutativ $\mathbb{Z}_5$, polinomul

$$f = X^3 + X + \hat{3}, \quad f \in \mathbb{Z}_5[X]$$

18. Să se determine rădăcinile polinomului $f = X^3 + 4X^2 + X - 6$ știind că are rădăcina -2 .

19. Descompuneți în produs de factori ireductibili peste corpul comutativ $\mathbb{Z}_5$, polinomul $f = X^2 + \hat{2}$, $f \in \mathbb{Z}_5[X]$

20. Descompuneți în produs de factori ireductibili peste corpul comutativ $\mathbb{Z}_3$, polinomul

$$f = X^4 + X^3 + X^2 + \hat{2}X + \hat{1}, \quad f \in \mathbb{Z}_3[X]$$

21. Arătați că polinomul $f = X^4 + X + \hat{1}$, $f \in \mathbb{Z}_2[X]$ este ireductibil peste $\mathbb{Z}_2$.

22. Se consideră polinomul $f = X^4 - X^3 + aX^2 + bX + c$, unde $a, b, c \in R$.

- Pentru $a = c = 1$ și $b = -1$ să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X^2 + 1$.
- Să se determine numerele a, b, c știind că restul împărțirii polinomului f la $X^2 + 1$ este X , iar restul împărțirii polinomului f la $X - 1$ este -1 .
- Să se demonstreze că dacă $a \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, atunci f nu are toate rădăcinile reale.

23. În mulțimea $R[X]$ se consideră polinoamele $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ și $g = X^2 - X - 1$.

- Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
- Să se arate că dacă y este rădăcina a polinomului g , atunci $y^3 = 2y + 1$.
- Să se demonstreze că dacă y este rădăcina a polinomului g , atunci $f(y)$ nu este număr rațional.

24. Se consideră polinoamele cu coeficienți reali $f = X^4 + aX^3 - 28X^2 + bX + 96$ și $g = X^2 + 2X - 24$.

- Să se scrie forma algebrică a polinomului $h = (X^2 + 2X - 24)(X^2 - 4)$.
- Să se determine $a, b \in R$ astfel încât polinoamele f și $h = (X^2 + 2X - 24)(X^2 - 4)$ să fie egale.
- Să se rezolve în R ecuația $16^x + 2 \cdot 8^x - 28 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 96 = 0$.

25. Fie polinoamele $f = X^3 + aX^2 + X + \hat{1}$ și $g = X + \hat{3}$ din inelul $Z_5[X]$.

- Să se determine $a \in Z_5$, astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g .
- Pentru $a = \hat{1}$, să se arate că $f = (X + \hat{1})(X^2 + \hat{1})$.
- Pentru $a = \hat{1}$, să se rezolve în inelul $(Z_5, +, \cdot)$ ecuația $f(x) = \hat{0}$.

26. Se consideră polinoamele $f, g \in Z_5[X]$, $f = (\hat{3}a + \hat{3}b)X^2 + \hat{2}X + \hat{2}a + \hat{3}b$ și

$$g = \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{3}a + \hat{2}b.$$

- Să se determine $a, b \in Z_5$ astfel încât cele două polinoame să fie egale.
- Pentru $a = b = \hat{2}$, să se calculeze în Z_5 suma $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) + f(\hat{3}) + f(\hat{4})$.
- Pentru $a = b = \hat{2}$, să se rezolve în Z_5 ecuația $f(x) = \hat{0}$.

27. Se consideră polinoamele $f = (X + 1)^{2012} + (X - 1)^{2012}$ și $g = X + 1$. Polinomul f are forma algebrică

$$f = a_{2012}X^{2012} + a_{2011}X^{2011} + \dots + a_1X + a_0, \text{ cu } a_0, a_1, \dots, a_{2012} \in R.$$

- Să se determine a_0 .
- Să se calculeze restul împărțirii polinomului f la polinomul g .

Prof. Mestecan Cornelia

Fișă de exerciții – Polinoame - Clasa a XII-a

- c. Să se calculeze suma coeficienților polinomului f .
28. Se consideră polinoamele $f, g \in R[X]$, $f = (X-1)^{10} + (X-2)^{10}$ și $g = X^2 - 3X + 2$.
- Să se descompună polinomul g în produs de factori ireductibili în $R[X]$.
 - Să se demonstreze că polinomul f nu este divizibil cu polinomul g .
 - Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
29. Se consideră polinomul $f = X^4 + mX^2 + n$, unde $m, n \in R$. Rădăcinile polinomului sunt x_1, x_2, x_3, x_4 .
- Să se determine $m, n \in R$ știind că polinomul f admite rădăcinile $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$.
 - Să se determine $m \in R$ astfel încât rădăcinile polinomului să verifice relația $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2$.
 - Pentru $m=1$ și $n=1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $R[X]$.
30. Se consideră polinoamele cu coeficienți raționali $f = X^4 + aX^3 + bX^2 - 5X + 6$ și $g = X^3 + X - 2$.
- Să se determine $a, b \in Q$, astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g .
 - Pentru $a = -3$ și $b = 1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $Q[X]$.
 - Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x} - 3^{2x+1} + 3^x - 5 + 6 \cdot 3^{-x} = 0$.
31. Se consideră polinomul $f = X^3 - 9X^2 - X + 9$ care are rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in R$.
- Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 1$.
 - Să se verifice că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 18$.
 - Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f(3^x) = 0$.
32. Se consideră polinomul cu coeficienți raționali $f = X^3 + aX^2 - 5X + 14$ și suma $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n, n \in N^*$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
- Să se determine numărul rațional a astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1 = -2$.
 - Pentru $a = -4$ să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
 - Pentru $a = -4$ să se demonstreze egalitatea $S_3 + 42 = 4S_2 + 5S_1$.
33. Se consideră polinoamele $f = \hat{3}X^5 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X + \hat{4} \in Z_5[X]$ și $g = \hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{3} \in Z_5[X]$.
- Să se calculeze $f(\hat{0}) + f(\hat{1})$.
 - Să se rezolve în mulțimea Z_5 ecuația $f(x) = \hat{0}$.
 - Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
34. Se consideră polinomul $f = mX^3 + 11X^2 + 7X + m$ care are coeficienți reali.
- Să se determine $m \in R$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $g = X - 1$.
 - Pentru $m = -9$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $R[X]$.
 - Pentru $m = -9$ să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului f .
35. Fie polinomul $f_a = X^3 + aX^2 - aX - 4$ care are coeficienți numere reale.
- Să se determine $a \in R$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 = -2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile reale ale polinomului f_a .
 - Să se determine $a \in R$ astfel încât polinomul f_a să fie divizibil cu polinomul $X^2 - 2$.
 - Să determine $a \in Z$ pentru care polinomul f_a are o rădăcină rațională pozitivă.
36. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 - X - 1$, unde $a \in Z$.
- Să se determine a știind că $x=1$ este rădăcină a polinomului f .
 - Pentru $a=1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f .
 - Să se demonstreze că $f(x) \neq 0, \forall x \in Q \setminus Z$.
37. Se consideră inelul polinoamelor $z_3[X]$.
- Pentru $g \in Z_3[X], g = (X + \hat{2})^2(X + \hat{1})$, să se calculeze $g(\hat{0})$.

b. Dacă $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X$, să se arate că $f(x) = \hat{0}, \forall x \in \mathbb{Z}_3$.

c. Să se determine toate polinoamele $h \in \mathbb{Z}_3[X]$, care au gradul egal cu 3 și pentru care $h(\hat{0}) = h(\hat{1}) = h(\hat{2})$.

38. Se consideră polinomul $f = 4X^4 + 4mX^3 + (m^2 + 7)X^2 + 4mX + 4$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că $x=1$ este rădăcină a polinomului f .

b. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că suma rădăcinilor polinomului f este egală cu 0.

c. Pentru $m = -5$ să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

39. Se consideră polinomul $f = (X^2 - 2X + 1)^2 - a^2$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a. Știind că $a = 0$ să se determine soluțiile ecuației $f(x) = 0$.

b. Să se verifice că $f = (X^2 - 2X + 1 + a)(X^2 - 2X + 1 - a)$.

c. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul f are toate rădăcinile reale.

40. Se consideră polinomul $f = X^4 - 12X^2 + 35 \in \mathbb{R}[X]$.

a. Să se arate că $f = (X^2 - 6)^2 - 1$.

b. Să se demonstreze că polinomul f nu are rădăcini întregi.

c. Să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

41. Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 .

a. Să se calculeze suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

b. Să se determine rădăcinile polinomului f știind că $a = -1, b = -2$ și $c = 0$.

c. Știind că rădăcinile polinomului f sunt în progresie aritmetică, să se demonstreze că $b = a - 1$.

42. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 , unde $a, b \in \mathbb{R}$.

a. Pentru $a = 1$ și $b = 0$ să se determine x_1, x_2, x_3 .

b. Știind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$, să se arate că $a = 1$.

c. Știind că $f = (X - x_1^2)(X - x_2^2)(X - x_3^2)$, să se determine numerele reale a și b .

43. În inelul $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 - X - 5$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 .

a. Să se calculeze $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

b. Să se determine numărul real a pentru care restul împărțirii polinomului f la $X - a$ să fie -5 .

c. Să se arate că valoarea determinantului $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ este număr întreg.

44. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + mX + 1, m \in \mathbb{R}$ și x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale. Se definește

$S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Să se determine numărul real m astfel încât $x_1 = 2$.

b. Să se arate că $S_3 + S_2 + mS_1 + 3 = 0$.

c. Să se arate că pentru orice număr par $m \in \mathbb{Z}$ polinomul f nu are rădăcini raționale.

45. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ și $g = X^3 + X^2 + X + 1$.

a. Să se demonstreze că $f = X \cdot g + 1$.

b. Să se determine rădăcinile reale ale polinomului g .

c. Să se calculeze $f(a)$, știind că a este o rădăcină a polinomului g .

46. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{3}X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{3}X + \hat{2}$ și $g = X^2 + \hat{2}X$.

a. Să se calculeze $f(\hat{1}) \cdot g(\hat{0})$.

b. Să se verifice că $f = (\hat{3}X + \hat{3}) \cdot g + \hat{2}X + \hat{2}$.

- c. Să se determine numărul rădăcinilor din Z_5 ale polinomului f .

47. Se consideră polinoamele $f = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in R$ și $g = X^2 - 2X + 1$, cu rădăcinile $y_1, y_2 \in R$.

- Să se calculeze diferența $S - S'$ unde $S = x_1 + x_2 + x_3$ și $S' = y_1 + y_2$.
- Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la g .
- Să se calculeze produsul $f(y_1) \cdot f(y_2)$.

48. Se consideră polinomul $f = X^4 - 2X^2 + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in R$.

- Să se arate că polinomul f este divizibil cu $g = X^2 - 1$.
- Să se calculeze produsul $S \cdot P$ unde $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ și $P = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$.
- Să se calculeze suma $T = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$.

49. Se consideră polinomul $f \in R[X]$, $f(X) = (X + 1)^{2012} - (X - 1)^{2012}$ care are forma algebrică $f(X) = a_{2012}X^{2012} + a_{2011}X^{2011} + \dots + a_1X + a_0$.

- Să se determine a_0 .
- Să se arate că $f(1) + f(-1)$ este număr întreg par.
- Să se determine rădăcinile reale ale polinomului f .

50. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX + c$, cu $a, b, c \in R$.

- Pentru $c=501$, să se demonstreze că $f(1) + f(-1) = 1004$.
- Pentru $a = -2$, $b=2$ și $c = -1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f .
- Să se demonstreze că nu există valori reale ale coeficienților a, b, c astfel ca f să se dividă cu polinomul $g = X^3 - X$.

51. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, cu $a, b, c \in R$ având rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in R$.

- Să se determine numărul real c știind că $f(1) + f(-1) = 2a + 1$.
- Știind că $a = -3$, $b=1$, $c=1$, să se determine rădăcinile reale ale polinomului f .

- Să se exprime în funcție de numerele reale a, b, c determinantul $D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

52. Se consideră polinomul $f = (1 + X + X^2)^{1006}$, cu forma algebrică

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{2012}X^{2012}.$$

- Să se calculeze $f(-1)$.
- Să se arate că $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2012}$ este un număr întreg impar.
- Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 - 1$.

Notă: problemele propuse sunt preluate din variantele de bac 2009 și manual.