

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A IX A

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - x^2$.
- Determinați coordonatele punctelor în care graficul taie axa Ox.
 - Determinați coordonatele vârfului parabolei (P) asociate funcției.
 - Notând cu S aria mulțimii din plan delimitate de parabola (P) și axa Ox, arătați că:
 $8 < S < 16$.

Soluție.

- intersecțiile graficului (parabolei) cu axa Ox sunt punctele $O(0, 0)$ și $A(4, 0)$ 2p
 - se obține imediat că vârful parabolei este $V(2, 4)$ 1p
 - Evident $S > A_{\text{OVAL}} \Leftrightarrow S > 8$ (I) 2p
- Utilizează $S < \text{Aria dreptunghiului}$ cu două dintre laturi OA și OP unde $VP \perp OY$,
 deci $S < 16$. (2)
 Din (1) și (2) se deduce concluzia. 2p

2.
 - Determinați cel mai mare număr întreg k pentru care $2x^2 - 3x + 1 \geq k$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
 - Găsiți numerele întregi x pentru care $(2x^2 - 3x + 1)^2 \leq 14x^2 - 21x + 1$.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

Soluție:

- Valoarea minimă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ este $y_{\min} = \left(-\frac{\Delta}{4a}\right) = -\frac{1}{8}$,
 deci $f(x) \geq -\frac{1}{8}, \forall x \in \mathbb{R}$ 2p
- Astfel numărul cerut este $k = -1$ 2p
- Metoda a II a:* $2x^2 - 3x + 1 - k \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ impune $\Delta' = 1 + 8k \leq 0 \Rightarrow k \leq -\frac{1}{8}$, deci $k_{\max} = -1$
- Notăm $y = 2x^2 - 3x + 1$ și inecuația dată conduce la: $y^2 \leq 7y - 6 \Rightarrow y^2 - 7y + 6 \leq 0$
 $\Rightarrow y \in [1, 6]$ 1p
- Ajungem la:
- $y = 2x^2 - 3x + 1 \geq 1 \Rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right) = S_1$
 - $y = 2x^2 - 3x + 1 \leq 6 \Rightarrow x \in \left[-1, \frac{5}{2}\right] = S_2$ 1p
- În final obținem $x \in S_1 \cup S_2 = [-1, 0] \cup \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$; cum $x \in \mathbb{Z}$, ajungem la $x \in \{-1, 0, 2\}$ 1p

Pentru desfacerea corectă a parantezelor, fără finalizare, se acorda un punct.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera tehnologică : profil tehnic

3. Nicu are plantați în livadă n pruni, numerotați distinct cu numerele $1, 2, 3, \dots, n$. Într-o zi, Nicu se apucă de cules prune respectând următoarea regulă: din prunul cu numărul 1 culege două prune, din prunul cu numărul 2, culege cinci prune, din prunul cu numărul 3, opt prune, și așa mai departe, culegând cu trei prune mai mult decât din pomul precedent.
- a) Ce număr de prune a cules din copacul cu numărul zece?
- b) Câți pruni ar trebui să aibă plantați Nicu pentru a fi sigur că, respectând regula indicată, la sfârșitul zilei are cules cel puțin 2010 prune ?

Soluție:

a) Notăm numărul de prune culese din pomul cu numărul n cu x_n și, observând că $(x_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică cu $x_1 = 2$ și rația $r = 3$, deducem imediat că $x_n = 3n - 1$

Atunci $x_{10} = 29$ 3p

b) Obținem imediat că suma prunelor culese este $S_n = \frac{(2 + 3n - 1)n}{2} = \frac{(3n + 1)n}{2}$ 1p

Din condiția $\frac{(3n + 1)n}{2} \geq 2010$ ajungem la $n(3n + 1) \geq 4020$ 1p

Încercări imediate conduc la: $36 \cdot (3 \cdot 36 + 1) = 36 \cdot 109 = 3924 < 4020$ și

$37 \cdot (3 \cdot 37 + 1) = 37 \cdot 112 = 4144 > 4020$ și astfel deducem $n \geq 37$,

adică Nicu ar trebui să aibă cel puțin 37 de pruni. 2p

4. Pe fiecare dintre laturile (AB), (BC) și (CA) ale unui triunghi ABC se consideră câte trei puncte, două colorate cu roșu și unul cu albastru.

a) Calculați câte triunghiuri au vârfurile printre cele nouă considerate.

b) Determinați câte dintre acestea au vârfurile colorate cu aceeași culoare.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

Soluție:

a) deosebim două cazuri:

(1) triunghiurile au câte un vârf pe fiecare latură; cu principiul produsului avem că în acest caz sunt $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ de triunghiuri; 1p

(2) două vârfuri sunt pe o latură și al treilea vârf este pe una din celelalte două laturi; avem în acest caz: $3 \cdot 3 \cdot 6 = 54$ de triunghiuri 1p

În total avem $27 + 54 = 81$ de triunghiuri. 1p

b)

Dacă luăm două vârfuri roșii pe o latură, avem 12 triunghiuri cu vârfurile roșii 2p

Dacă luăm câte un vârf roșu de pe fiecare latură, mai avem încă 8 triunghiuri 1p

La acestea se adaugă și un triunghi cu vârfurile albastre, așadar avem 21 de triunghiuri cu vârfurile de aceeași culoare. 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A X A

1. a) Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2 - 2 \cos t \cdot z + 1 = 0$, $t \in [0, 2\pi)$.

b) Dacă $z \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$ calculați $z^4 + \frac{1}{z^4}$ și $z^8 + \frac{1}{z^8}$.

c) Calculați $z^{1024} + \frac{1}{z^{1024}}$ știind că $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$.

Soluție:

a) Obține $z_1 = \cos t + i \cdot \sin t$; $z_2 = \cos t - i \cdot \sin t$ 2p

b) Obține $z^2 + \frac{1}{z^2} = 0$ 1p

și $z^4 + \frac{1}{z^4} = -2$ 1p

Obține $z^8 + \frac{1}{z^8} = 2$ 2p

c) Obține $z^{1024} + \frac{1}{z^{1024}} = 2$ 1p

2. a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\sqrt[3]{2 \cdot 3^x - 7} + \sqrt[3]{3^x - 2} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^x - 2} + \sqrt[3]{3^x - 7}$ utilizând, eventual, formula $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

b) Găsiți n și termenul care conține pe x^{-1} din dezvoltarea $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ știind că suma coeficienților primilor trei termeni este 36.

Soluție:

a) Ridicând în ambii membri la puterea a treia obținem :

$$3 \cdot 3^x - 9 + 3\sqrt[3]{(2 \cdot 3^x - 7)(3^x - 2)}(\sqrt[3]{2 \cdot 3^x - 7} + \sqrt[3]{3^x - 2}) = \\ = 3 \cdot 3^x - 9 + 3\sqrt[3]{(2 \cdot 3^x - 2)(3^x - 7)}(\sqrt[3]{2 \cdot 3^x - 2} + \sqrt[3]{3^x - 7}) \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{de unde obținem : } (\sqrt[3]{2 \cdot 3^x - 7} + \sqrt[3]{3^x - 2}) \left(\sqrt[3]{(2 \cdot 3^x - 7)(3^x - 2)} - \sqrt[3]{(2 \cdot 3^x - 2)(3^x - 7)} \right) = 0. \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Așadar analizăm cazurile: } \sqrt[3]{2 \cdot 3^x - 7} + \sqrt[3]{3^x - 2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2 \cdot 3^x - 7} = -\sqrt[3]{3^x - 2} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{sau } \left(\sqrt[3]{(2 \cdot 3^x - 7)(3^x - 2)} - \sqrt[3]{(2 \cdot 3^x - 2)(3^x - 7)} \right) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset. \quad \dots\dots\dots 1p$$

b) Din relația $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 = 36$ obținem $n^2 - 3n - 70 = 0 \Rightarrow n = 10$ 2p

În dezvoltarea $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ termenul căutat este $T_7 = -C_{10}^7 x^{-1}$ 2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera tehnologică : profil tehnic

3. Într-un sistem de axe de coordonate se consideră punctele A(3, 0), B(0, 2), M (3, -3) și N(-2, 2).
- a) Găsiți ecuația dreptei MB.
- b) Arătați că AN, BM și perpendiculara din O pe AB sunt concurente.

Soluție.

a) Scrie ecuația dreptei MB : $\frac{y - y_M}{y_B - y_M} = \frac{x - x_M}{x_B - x_M}$ 1p

Finalizare : MB : $5x + 3y - 6 = 0$ 2p

b) Obține ecuația dreptei AN : $2x + 5y - 6 = 0$ 1p

Obține coordonatele punctului de intersecție dintre AN și MB: $P\left(\frac{12}{19}, \frac{18}{19}\right)$ 1p

Deoarece $m_{OP} = \frac{3}{2}$; $m_{AB} = -\frac{2}{3}$ deducem $OP \perp AB \Leftrightarrow m_{OP} \cdot m_{AB} = -1$ 2p

4. Dintr-o urnă care conține mai mult de 10 bile ,colorate în verde sau roșu, un elev extrage bile până când constată că ,pentru prima dată, numărul de bile verzi extrase este egal cu numărul de bile roșii extrase. Elevul constată că acest lucru este îndeplinit după a zecea bilă extrasă și că nu există trei bile de aceeași culoare extrase consecutiv.

Demonstrați că :

- a) Dacă ultima bilă extrasă este verde, atunci și penultima este tot verde, iar antipenultima este roșie.
- b) A cincea și a șasea bilă extrase au culori diferite.

Soluție:

a) S-au extras 5 bile verzi și 5 bile roșii. $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, B_{10}$
verde roșie verde verde

Dacă ultima bilă extrasă este verde a noua este tot verde ,deoarece în caz contrar extragerea s-ar fi oprit după 8 bile extrase 2p

A opta bilă extrasă este roșie, deoarece în caz contrar ,ultimele 3 bile ar avea aceeași culoare, în contradicție cu ipoteza 2p

A șaptea bilă extrasă este verde, pentru că altfel extragerea s-ar fi oprit după doar 6 bile extrase 1p

b) Dacă B_5 și B_6 sunt verzi s-ar obține trei bile extrase consecutive, de aceeași culoare. Dacă B_5 și B_6 sunt roșii, atunci extragerea s-ar fi oprit după patru bile extrase, contradicție. Așadar B_5 și B_6 au culori diferite. 2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A XI A

1. Fie $M = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A \in \{-1, 1\}\}$.

- Arătați că M conține măcar 2 elemente.
- Justificați faptul că în M există cel puțin 2010 elemente.
- Demonstrați că, dacă $A, B \in M$, atunci $A \cdot B \in M$.

Soluție:

a) câte 1 p pentru fiecare exemplu dat 2p

b) de exemplu $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{N}$ 3p

c)

- dacă elevul alege 2 matrici concrete din mulțime și observă că produsul lor face parte din mulțime, primește un punct

- dacă alege 2 matrici oarecare din M și arată că produsul este din M , atunci primește 2 puncte 2p

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a, & x \in (-\infty, 1) \\ b, & x = 1 \\ x^2 + cx, & x \in (1, \infty) \end{cases}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$

- Arătați că există numere a, b, c astfel încât funcția de mai sus să fie continuă.
- Să se determine toate valorile a, b, c pentru care f este derivabilă pe întreg domeniul de definiție.

Soluție:

a) pentru calculul corect al limitei la stânga 1p

pentru calculul corect al limitei la dreapta 1p

finalizare 1p

b) pentru derivata la stânga 1p

pentru derivata la dreapta 1p

finalizare 2p

3. Se numește cod de lungime 9 o matrice M de tip 3×3 care are drept elemente doar cifre nenule astfel încât fiecare cifră apare o singură dată.

- Să se arate că există măcar 2 coduri M de lungime 9 pentru care $\det M = 0$.
- Determinați numărul total de coduri de lungime 9.
- Există coduri M de lungime 9 pentru care $\det M$ este nenul și multiplu de 3?

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera tehnologică : profil tehnic

Soluție:

a) pentru fiecare exemplu corect cate 2p

de exemplu
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

b) deduce ca numărul total este 9! (pentru încercări concrete si corecte de a deduce numărul obține 1p) 2p

c) da un exemplu corect si calculează determinantul..... 3p

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

4. Un drum este realizat de 2 constructori numiți A și B . Constructorul A realizează porțiunea de drum numită f, iar B realizează porțiunea de drum numită g. Se știe că $f : [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$ și $g : [2\pi, 10] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ și $g(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Un autovehicul se deplasează din punctul M(0, 0) către punctul N(2π,0), pe drumul construit de A. Știind că autovehiculul se deplasează cu viteză constantă, să se identifice punctul în care asupra autovehiculului nu acționează forța centrifugă (forța care “împinge” autovehiculul în exteriorul curbei). Argumentați.

b) Să se determine a și b astfel încât cei 2 constructori să poată “lipi” cele două drumuri astfel încât o mașină să poată parcurge întregul drum astfel format.

Soluție:

a) pentru explicații corecte făcute pe graficul funcției si pentru determinare empirica primește 2p;

Daca își da seama ca punctual căutat este singurul punct de inflexiune și îl deduce primește 3p

b) continuitate 2p

derivabilitate 2p

Daca reușește să explice empiric cum se pot lipi drumurile, primește 2 puncte din cele 4 ale subpunctului b.

Observație La problema 4, trebuie respectat simțul practic al elevului si eventualele “povesti” corecte vor fi punctate după cum s-a specificat mai sus.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII A

1.

$$\text{Fie } G = \left\{ M \in M_3(\mathbb{R}) / M = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

- a) Să se arate că $\forall M_1, M_2 \in G$, rezultă că $M_1 \cdot M_2 \in G$.
 b) Să se determine o matrice $F \in G$ cu proprietatea ca $M \cdot F = F \cdot M = F$, $\forall M \in G$.
 c) Să se determine o matrice $E \in G$ astfel încât $M \cdot E = E \cdot M = M$, $\forall M \in G$

Soluție:

- a) demonstrează cerința în cazul general 3p
 - dacă alege 2 matrici din M și face înmulțirea corectă observând apartenența la G , primește 1p

 b) observă că F se obține pentru $x=0$ 2p

 c) determină E ca fiind M pentru $x=1/2$ și face verificările..... 3p

2.

$$\text{Fie } f : \left[0, \frac{4}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, x \in [0, 1] \\ x^2 - 2x + 2, x \in \left[1, \frac{4}{3}\right] \end{cases}$$

- a) Arătați că f e continuă pe $\left[0, \frac{4}{3}\right]$.
 b) Calculați o primitivă pentru funcția f .
 c) Să se calculeze volumul "clopotului" format prin rotirea graficului funcției f în jurul lui Ox .

Soluție:

- a) calculează limitele laterale și $f(1)$ 1p
 observă că cele 3 valori sunt egale 1p
 justifică faptul că f e continuă pe întreg intervalul 1p
 b) calculează primitiva primei ramuri 1p
 calculează primitiva ramurii a doua..... 1p
 "leagă" constantele între ele (finalizare) 1p
 c) aplică formula pe ramuri și adună cele două volume..... 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA FINALĂ - 22 mai 2010

Filiera tehnologică : profil tehnic

3. Fie polinomul $P = X^4 + aX^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.
- a) Să se arate că pentru $a = -4$, polinomul de mai sus are toate rădăcinile reale.
- b) Să se descompună P în factori ireductibili (in $\mathbb{R}[X]$) pentru $a = 1$.

Soluție:

- a) observă că avem o ecuație bipătrată și face notația $y = x^2$ 1p
 calculează y_1, y_2 2p
 extrage radicalii și finalizează..... 1p
- b) realizează descompunerea $(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$ 2p
 justifică ireductibilitatea 1p

4. Fie $f : [0, \pi] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = \sin x$.
- a) Să se demonstreze că f este concavă.
- b) Să se demonstreze că lungimea graficului lui f este mai mare decât $\sqrt{\pi^2 + 4}$.

Soluție:

- a) calculează derivata doua 2p
 observă că e derivata a doua este negativă 1p
 Dacă justifică concavitatea grafic primește 2p (pe un grafic desenat corect)
- b) alege "vârful" graficului și observă pe desen (sau folosind concavitatea) că o coardă e sub grafic 2p
 aplică teorema Pitagora și obține concluzia 2p