CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

CLASA A IX A

1.
a) Dați exemplu de o ecuație de gradul al doilea având coeficienți raționali care admite ca rădăcină numărul $x_1 = -1 + \sqrt{3}$.
b) Un agent economic a închiriat spre amenajare un spațiu comercial în care pardoseala are forma unui pătrat cu latura egală cu $2x-3$ metri. Într-un colț, sub forma unui pătrat cu latura egală cu x metri, amenajează magazia iar restul de 24 metri pătrați îi are la dispoziție pentru expunerea mărfii. Ce suprafață a închiriat ?

2. Se consideră triunghiul *ABC* şi punctele *M, N* în planul triunghiului astfel încât
$\overrightarrow{AM} = 2\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ iar $\overrightarrow{CN} = q\cdot\overrightarrow{CB}$, unde $q > 0$.
a) Demonstrați că $\overrightarrow{AN} = (1-q)\cdot\overrightarrow{AC} + q\cdot\overrightarrow{AB}$.
b) Să se determine q astfel încât punctele A,M.,N să fie coliniare.

3. Se consideră şirurile $(a_n)_{n\ge1}$, $(b_n)_{n\ge1}$ cu $a_1 = 2, a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$, pentru orice $n \ge 1$ şi $b_n = \frac{3-a_n}{a_n - 1}$, pentru orice $n \ge 1$.
a) Determinați termenii a_2, a_3, a_4.
b) Utilizând metoda inducției matematice arătați că $a_n = \frac{n+1}{n}$, pentru orice n ≥ 1.
c) Arătați că şirul b_n este progresie aritmetică.

4. Matei şi Irina sunt elevi în clasa a IX-a şi studiază la şcoală 15 discipline obținând la sfârşitul semestrului I aceeaşi medie generală. Ştiind că au avut numai medii de opt, nouă şi zece iar numărul mediilor de zece ,nouă şi opt ale lui Matei este respectiv egal cu numărul mediilor de nouă, opt şi zece ale Irinei, precizați câte medii de zece are Irina.?

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

CLASA A X A

1.

a) Dacă a = $\sqrt{2x+3}, b=\sqrt[3]{4x-4}, x\in[-\frac{3}{2},\infty)$, demonstrați că $2a^2-b^3=10$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases}2a^2-b^3=10\\ a+b=5\end{cases}$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=1-\varepsilon z$, unde $\varepsilon=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Verificați că $\varepsilon^2-\varepsilon+1=0,\ \varepsilon^3=-1$

b) Arătați că $f(f(z))=1-\varepsilon+\varepsilon^2 z, \forall z\in\mathbb{C}$.

c) Demonstrați că $f(f(f(z)))=z$, $\forall z\in\mathbb{C}$.

3. Se consideră mulțimea $G=\left\{w\in\mathbb{C} \mid w=\frac{z}{|z|}+\frac{|z|}{z}, \forall z\in\mathbb{C}^*\right\}$.

a) Arătați că. $\forall w\in G\Rightarrow w\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $-2\le\frac{z}{|z|}+\frac{|z|}{z}\le 2,(\forall)z\in C^*$.

4. Se consideră funcția $f:(0,1)\to R, f(x)=\frac{\log_2(1-x^2)}{x^2}$ și notăm

$$S_n=\frac{1}{2^2}f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^2}f\left(\frac{1}{3}\right)+...+\frac{1}{n^2}f\left(\frac{1}{n}\right), n\in N, n\ge 2.$$

a) Demonstrați că $\frac{1}{k^2}f\left(\frac{1}{k}\right)=\log_2(k+1)-2\log_2 k+\log_2(k-1), \quad \forall k\ge 2$.

b) Să se demonstreze că $S_n=\log_2\frac{n+1}{2n},(\forall)n\ge 2$.

c) Arătați că $S_n\in R\setminus\mathbb{Q}, (\forall)n\ge 2$.

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

CLASA A XI A

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi $M_t=\frac{t}{2}\cdot A+\frac{1}{2t}\cdot B, t>0$

a) Calculați $A^2, B^2, A\cdot B, B\cdot A$.

b) Verificați identitatea $M_t\cdot M_v=M_{t\cdot v}, (\forall)t,v>0$.

c) Arătați că pentru orice t>0 matricea M_t este inversabilă.

2. Se consideră funcția $f:R^*\to R, f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$

a) Determinați asimptota spre $-\infty$ la graficul funcției f.

b) Calculați $\left(f(-1)+2\cdot f\left(\frac{-1}{2}\right)+...+n\cdot f\left(\frac{-1}{n}\right)\right)$

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+\cos x$.

a) Să se calculeze $f(0)$ şi . $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Să se arate că $f(x)\geq x-1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

c) Să se identifice un $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(a)=a-1$ şi să se calculeze limita funcției f la $+\infty$.

4. Fie M mulțimea tuturor matricilor de tip 3x3, în care toate elementele aparțin mulțimii $\{0,1\}$ (aceste matrici se numesc coduri de lungime 9).

a) Să se dea un exemplu de un cod A din mulțimea M care are determinantul egal cu -1.

b) Să se determine numărul total de coduri din mulțimea M.

c) Să se indice 2 matrice diferite A şi B din M ,care au proprietatea $A^2=B^2=I_3$.

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

CLASA A XII A

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $M_t=\frac{t}{2}\cdot A+\frac{1}{2t^2}\cdot B$, iar $G=\{M_t \mid t>0\}$

a) Calculați $A^2, B^2, A\cdot B, B\cdot A$.

b) Arătați că G este parte stabilă a mulțimii $M_2(R)$ in raport cu înmulțirea matricelor

c) Arătați ca $(G,\bullet)$ este grup abelian.

2. Se considera funcția $f:R\to R$ $f(x)=1+x+x^2+...+x^{2010}$ iar $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

a) Verificați că $(1-x)\cdot f(x)=1-x^{2011}, \forall x\in R$.

b) Să se arate că funcția F este strict crescătoare

c) Să se arate că $F(1)>3$.

3. Fie $I_n=\int_1^e (\ln x)^n dx$, $n\geq 1$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $I_{2011}\leq I_{2010}$.

4. Fie $G\subset\mathbb{Z}$, o mulțime finită şi nevidă. Se ştie că $\forall\, x,y\in G\Rightarrow x\bullet y\in G$

a) Să se dea un exemplu de mulțime G care verifică proprietățile de mai sus.

b) Arătați că $2\notin G$ şi că G are maxim 3 elemente.

c) Dacă în plus G nu conține pe 0 , atunci $(G,\bullet)$ este grup.

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*