CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

CLASA A IX A

1. Se consideră ecuațiile $x^2+2bx+2c=0$ şi $x^2+2cx+2b=0$, unde b şi c sunt numere reale pozitive.
a) Dacă numerele b şi c sunt distincte demonstrați că ecuațiile au o rădăcină reală comună.
b) Dacă produsul celor patru numere reale care reprezintă rădăcinile celor două ecuații este 16, să se afle b şi c.

2. Se consideră funcția $f:R\to R, f(x)=2x^2+a\cdot x-1$, a$\in R$
a) Găsiți a $\in R$ dacă funcția f este funcție pară.
b) Pentru a = 0 verificați că punctele $M\left(\frac{1}{2\sqrt{2}},-\frac{3}{4}\right), N\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}},-\frac{3}{4}\right)$ sunt situate pe graficul funcției și demonstrați că aria suprafeței delimitată de graficul funcției f şi axa (Ox) este mai mare decât $\frac{5}{4\sqrt{2}}$
c) Pentru a = 0 demonstrați că $(f\circ f)(\cos(u))=\cos(4u)$, $(f\circ f\circ f)(\cos(u))=\cos(8u)$, pentru orice număr real u.

3. Se consideră vectorii $\vec{u},\vec{v}$ şi numărul real $t\in[0,1]$
a) Demonstrați că $|t\cdot\vec{u}+(1-t)\cdot\vec{v}|+|t\cdot\vec{v}+(1-t)\cdot\vec{u}|\le|\vec{u}|+|\vec{v}|$ pentru orice $t\in[0,1]$.
b) În triunghiul ABC considerăm punctele $M,N\in[BC]$ astfel încât BM = CN.Notăm $\frac{MC}{BM}=\frac{BN}{CN}=\frac{1}{k}$. Demonstrați că $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AN}=\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AC}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}$ şi ,apoi utilizând inegalitatea de la punctul ***(a)*** demonstrați că $AM+AN\le AB+AC$

4. O firmă, afectată de criză, urmează a renunța la unul din cele trei schimburi (S_1,S_2,S_3) în care se desfăşoară activitatea pentru a se încadra în bugetul fixat **B**. In urma analizării costurilor de producție *compartimentul organizare* afirmă că bugetul **B** ajunge pentru funcționarea S_1,S_2 timp de 12 luni sau pentru funcționarea S_1,S_3 timp de 9 luni sau pentru funcționarea S_2,S_3 timp de 4 luni. Justificați că analiza făcută este greşită .

<u>Notă:</u> *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

CLASA A X A

1. Raluca a cumpărat pentru colecția sa 4 noi timbre, câte unul din Anglia, Franța, Italia şi Grecia. Fără cel din Anglia ea ar fi plătit 4 lei, fără cel din Franța ea ar fi plătit 4,5 lei, fără cel din Italia ea ar fi plătit 4,4 lei ,iar prețul timbrelor fără cel din Grecia este de 2,7 lei. Cât a costat fiecare dintre cele 4 timbre?

2. a) Demonstrați că $4x - x^2 \leq 4, \forall x \in R$.

b) Demonstrați că ecuația $\frac{\left(2011^x + 1\right)^2}{2011^x} = \left(4x - x^2\right)$ nu are soluții reale.

c) Determinați numerele reale x şi y, astfel încât $y^2 - 4y + 8 = 4\log_2\left(x^2 + 1\right) - \log_2^2\left(x^2 + 1\right)$.

3. a) Demonstrați că $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \forall x, y > 0$ iar $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma, \forall \alpha, \beta, \gamma > 0$

b) Fie a, b, c > 1 şi x >0. Demonstrați echivalența: $a^x = bc \Leftrightarrow x = \frac{\lg b + \lg c}{\lg a}$.

c) Dacă există a, b ,c >1 şi x, y, z >0 care verifică simultan relațiile:

$a^x = bc,\ b^y = ca,\ c^z = ab$ demonstrați că: $\frac{x+y+z}{3} \geq 2\ si\ \sqrt[3]{xyz} \geq 2.$

4. Fie expresia $E(x) = \sqrt{\frac{4-x}{4+x}} + a \cdot \sqrt{\frac{4+x}{4-x}},\ a \in R.$

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care E(x) are sens.
b) Dacă a = 1, rezolvați ecuația E(x) = 2.
c) Determinați valorile lui a astfel încât ecuația E(x) = 2 să aibă soluții reale şi apoi rezolvați ecuația .

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

CLASA A XI A

1. Fie $f: R^* \to M_3(R), f(x) = x \cdot A$,unde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculați $f^2(x)$ şi $f^3(x)$.

b) Determinați $f^{2011}(1)$.

c) Găsiți $x \in R^*$ astfel încât : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot f(x) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} = (2011)$,unde (2011) este matrice cu o linie şi o coloană.

2. O navetă spațială are traiectoria dată de y= $f(t) = \sqrt{\frac{t^2-4}{4}}$, unde t reprezintă timpul în secunde iar $f(t)$ reprezintă înălțimea în kilometri(de la momentul t = 0 până la t = 2 se consideră că are loc desprinderea de pe rampa de lansare deci înălțimea este considerată 0).

a) Să se determine înălțimea la care ajunge naveta după 4 secunde de la desprinderea de pe rampa de lansare.

b) Să se demonstreze că traiectoria este concavă

c) Să se determine asimptota traiectoriei.(considerând că timpul tinde spre infinit).

3. Fie M mulțimea tuturor matricilor de ordin 3 formate doar cu numerele 1, 3, 5,…,17(fiecare număr impar apare o singură dată intr-o matrice din M).

a) Să se dea un exemplu format din două matrici diferite din M dar care au acelaşi determinant.

b) Să se verifice dacă există o matrice A din M astfel încât $\det A = \det I_3$.

c) Să se determine numărul de matrici din M care au pe linia întâi elementele 1, 3 şi 5(nu neapărat în această ordine).

4. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$.Să se demonstreze că :

a) $f(\ln 2) > 0$ (folosind eventual aproximarea $\ln 2 \simeq 0,7$).

b) $f(x) < 0, \forall x < 0$.

c) $\sqrt{e} > 1,625$.

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

CLASA A XII A

1. Fie M mulțimea tuturor grupurilor cu 4 elemente.

a) Să se dea exemplu de grup din M.

b) Să se demonstreze că există un grup $G \subset M$ astfel încât $G \cap \mathbb{C} \neq \varnothing$.

c) Să se demonstreze că în M există măcar două grupuri neizomorfe.

2. Fie funcția $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.

a) Să se demonstreze că $f(x) > 0, \forall x \in (0,\infty)$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Să se demonstreze că $\ln 2 > 0,66$.

3. Fie $f, g : \mathbb{Z}_{13} \to \mathbb{Z}_{13}, f(x) = x \bullet x, g(x) = x + x$, $\forall x \in \mathbb{Z}_{13}$.

a) Să se determine două elemente distincte a şi b din $\mathbb{Z}_{13}$ astfel încât $f(a) = f(b)$ şi $g(a) \neq g(b)$.

b) Să se demonstreze că funcția f nu e surjectivă iar funcția g este bijectivă.

4. Fie mulțimea $P = \{ f:[0,1] \to [0,1] \mid f \; continua \; pe [0,1], f(0) = 0, f(1) = 1 \}$.

a) Să se demonstreze că în P avem măcar 2011 funcții.

b) Să se determine o funcție $f \in P$ cu proprietatea că $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

c) Să se demonstreze că există un număr infinit de funcții din f astfel încât $\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{2011}$.

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*