

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013

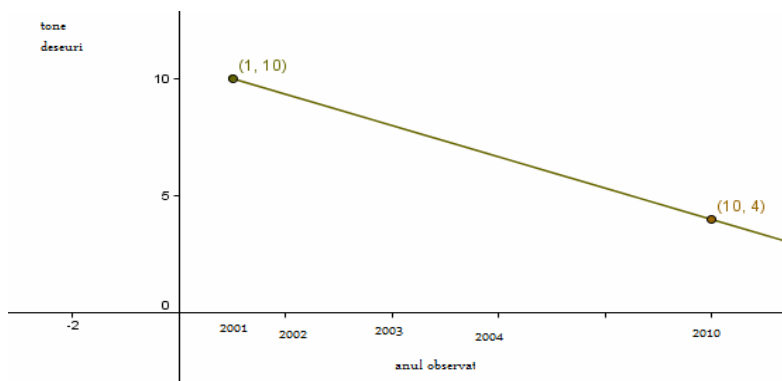
Filiera tehnologică : profil tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A IX-A

1. Deșeurile colectate și apoi prelucrate dintr-un oraș au scăzut constant, conform graficului următor, începând cu anul 2001. Estimați în ce an, datorită măsurilor de protecție a mediului, acestea vor ajunge, după prelucrare, la nivelul 0.



Lucian Dragomir

Soluție:

Deoarece graficul indică o dreaptă, este vorba despre o funcție exprimată printr-o expresie de gr. I , anume $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ 2p

Impunem condițiile: $f(2001) = 10$ și $f(2010) = 4$ 2p

Obținem $f(x) = -\frac{2}{3}x + 1344$ 2p

Impunem condiția $f(x) = 0$ și obținem: anul 2016 1p

2. Se consideră mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + ax + b - 1 = 0\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + bx + a - 1 = 0\}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că, dacă x și y sunt numere reale astfel încât $x + y \geq 0$, atunci $x \geq 0$ sau $y \geq 0$.

b) Demonstrați că $a^2 - 4(b - 1) + b^2 - 4(a - 1) \geq 0$, pentru orice numere reale a și b .

c) Demonstrați că mulțimea $A \cup B$ este nevidă.

Soluție:

a) Dacă, prin absurd, $x < 0$ și $y < 0$, atunci $x + y < 0$, ceea ce contrazice ipoteza 1p

Urmează concluzia 1p

b) Avem $a^2 - 4(b - 1) + b^2 - 4(a - 1) = (a - 2)^2 + (b - 2)^2 \geq 0$ 2p

c) Din a) și b) rezultă că $a^2 - 4(b - 1) \geq 0$ sau $b^2 - 4(a - 1) \geq 0$ 1p

Rezultă că mulțimea A este nevidă sau mulțimea B este nevidă 1p

Concluzia 1p

3. Să se determine numerele întregi a, b, c știind că în această ordine sunt în progresie aritmetică de rație 3, iar a^2, b^2, c^2 sunt în progresie geometrică, nu neapărat în această ordine.

Soluție:

Din ipoteză deducem că $b = a + 3$ și $c = a + 6$ 1p

Cazul 1. Dacă b^2 este termenul din mijloc, atunci $b^2 = ac$ sau $b^2 = -ac$ 1p

Înlocuind b și c găsim ecuații în a care nu au soluții 1p

Cazul 2. Dacă c^2 este termenul din mijloc, găsim $a = -4, b = -1$ și $c = 2$ 2p

Cazul 3. Dacă a^2 este termenul din mijloc, găsim $a = -2, b = 1$ și $c = 4$ 2p

4. Se consideră trapezul ABCD, cu bazele (AB) și (CD) în care $AB = 8, CD = 4, AD = 6, m(\hat{A}) = 60^\circ$, iar punctul E este mijlocul laturii AD.

1) Să se determine lungimea diagonalei BD.

2) Calculați mărimea vectorului $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BC}$.

Soluție:

a) $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos A$ 2p

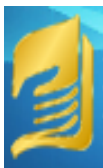
$BD = 2\sqrt{13}$ 1p

b) $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD})$ 1p

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA}$ 1p

Obținem $\vec{v} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{BD}$ 1p

Concluzia $|\vec{v}| = 3\sqrt{13}$ 1p



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A X-A

1. a) Să se verifice egalitatea $\frac{1}{\log_{x^n \cdot y^m} A} = \frac{n}{\log_x A} + \frac{m}{\log_y A}$, unde $A > 1$, $x, y > 1$ iar $m, n \in \mathbb{R}^*$.
- b) Dacă $a = \log_{18} N$ și $b = \log_{12} N$, să se exprime $\log_2 N$ și $\log_3 N$ în funcție de a și b .

Soluție:

a) Aduce la baza A scriind :

$$\frac{1}{\log_{x^n \cdot y^m} A} = \log_A x^n + \log_A y^m = n \log_A x + m \log_A y = \frac{n}{\log_x A} + \frac{m}{\log_y A} \dots\dots\dots 3p$$

b) Folosind relația anterioară putem scrie:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\log_{2 \cdot 3^2} N} = \frac{1}{\log_2 N} + \frac{2}{\log_3 N}, \text{ iar } \frac{1}{b} = \frac{1}{\log_{2^2 \cdot 3} N} = \frac{2}{\log_2 N} + \frac{1}{\log_3 N}$$

$$\text{Prin adunare } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 3 \left(\frac{1}{\log_2 N} + \frac{1}{\log_3 N} \right), \text{ iar } \log_3 N = \frac{3ab}{2b-a}, \log_2 N = \frac{3ab}{2a-b} \dots\dots\dots 4p$$

2. Pentru un triunghi ABC se cunosc: coordonatele unui vârf $A(9, -9)$, ale centrului de greutate $G(2, 0)$ și ale mijlocului unei laturi $N(-3, -3)$.
- a) Demonstrați că punctele A, G, N nu sunt coliniare.
- b) Determinați coordonatele vârfului triunghiului coliniar cu A și N .
- c) Determinați ecuația laturii BC .

Soluție:

a) Obține $m_{AG} = -\frac{9}{7}$, $m_{GN} = \frac{3}{5}$, deci punctele A, G, N nu sunt coliniare 3p

b) Fie B vârful triunghiului coliniar cu A și N . Atunci N este mijlocul segmentului AB , ceea ce conduce la $-3 = \frac{9+x_B}{2} \Rightarrow x_B = -15$ iar $-3 = \frac{-9+y_B}{2} \Rightarrow y_B = 3$. Obține $B(-15, 3)$ 2p

c) Fie C cel de-al treilea vârf al triunghiului. Folosind coordonatele centrului de greutate, obținem $2 = \frac{-15+9+x_C}{3} \Rightarrow x_C = 12$ iar $0 = \frac{-9+3+y_C}{3} \Rightarrow y_C = 6$ 1p

Obține ecuația (BC) : $x - 9y + 42 = 0$ 1p

3. Pentru a înveseli atmosfera cei patru colegi de birou au hotărât să organizeze o tombolă cu ocazia Crăciunului. Astfel fiecare a adus câte un cadou, cadourile au fost numerotate cu numere de la 1 la 4, iar prin extragerea unuia dintre cele patru bilețele pe care erau scrise numerele de la 1 la 4 să își aleagă cadoul numerotat cu respectivul număr.
- a) În câte moduri se pot numerota cele patru cadouri ?
- b) În câte dintre situațiile posibile nici o persoană nu primește cadoul cumpărat de ea ?

Soluție:

Fiind patru cadouri vom avea $4! = 24$ moduri de a le numerota, deoarece ordinea contează 3p

Pentru a fixa lucrurile considerăm A, B, C respectiv D cele patru persoane și admitem că A a adus cadoul numerotat cu 1, B a adus cadoul numerotat cu 2, C a adus cadoul numerotat cu 3, iar D a adus cadoul numerotat cu 4. Numărăm câte permutări fără puncte fixe putem construi ($A \neq 1, B \neq 2, C \neq 3, D \neq 4$) 1p

Permutările $(2, 3, 4, 1), (2, 1, 4, 3), (2, 4, 1, 3)$ au pe primul loc pe 2 și verifică cerința 2p

Vor fi tot câte trei permutări cu 3 și respectiv 4 pe primul loc, deci un număr de 9 permutări verifică cerința 1p

4. Se consideră funcția $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f_n(x) = (1+x)^n, n \in \mathbb{N}^*$

- a) Calculați $f_6(i) + f_6(-i)$.
- b) Demonstrați că dacă există $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|f_{2013}(z)| = |f_{2013}(-z)|$, atunci $z \in i \cdot \mathbb{R}$.
- c) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ știind că $(C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots)^2 = 1024$, calculând eventual $f_n(i) \cdot f_n(-i)$.

Soluție:

Obține $f_6(i) = -8i$ 2p

$f_6(-i) = 8i$, iar suma $f_6(i) + f_6(-i) = 0$ 1p

Fie $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$. Din relația $|f_{2013}(z)| = |f_{2013}(-z)|$ deduce $|1+z| = |1-z|$ 1p

Finalizare : $\sqrt{(1+a)^2 + b^2} = \sqrt{(1-a)^2 + b^2} \Leftrightarrow a = 0, z = ib \in i\mathbb{R}$ 1p

Obține $f_n(i) = (1+i)^n = (C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots) + i \cdot (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots)$ 1p

Obține $f_n(i) \cdot f_n(-i) = 2^n = (C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots)^2 = 1024$, de unde $n = 10$ 1p



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013
Filiera tehnologică : profil tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XI-A

1. Spunem că matricea $A \in M_3(\mathbb{R})$ se numește *perturbată* dacă are exact patru elemente egale cu 0 care formează un minor de ordinul al doilea construit cu liniile 1 și 2 ale matricei, iar celelalte elemente sunt diferite între ele.
- Dați exemplu de o matrice *perturbată*.
 - Să se demonstreze că orice matrice *perturbată* nu este inversabilă.
 - Câte matrice perturbate având restul elementelor cifre se pot construi ?

Soluție:

Un exemplu este matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 1p

O matrice perturbată poate fi numai una dintre următoarele :

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ e & d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & y & 0 \\ t & z & u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 \\ p & q & r \end{pmatrix}$, unde variabilele sunt numere reale 3p

Se verifică, în fiecare caz, că determinantul este nul, deci matricea nu este inversabilă 1p

Notă: Verificarea cerinței pentru un singur tip de matrice se va puncta cu 2 puncte

Elementele nenule pot fi alese în $A_9^5 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$ moduri 1p

Se obține că un număr de $3 \cdot A_9^5 = 45360$ matrice verifică cerința 1p

2. Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ definim matricea $D(A, B) = A \cdot B - B \cdot A$

a) Verificați $D(A, A) = D(A, I_2)$

b) Demonstrați că există $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $D(A, B) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$.

c) Demonstrați că $D^2(A, B)$ este de forma $\alpha \cdot I_2$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluție:

Obține $D(A, A) = O_2$ și $D(A, I_2) = O_2$ 2p

Alegând $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$

obținem $AB = \begin{pmatrix} am + bp & an + bq \\ cm + dp & cn + dq \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} am + cn & mb + dn \\ pa + cq & pb + dq \end{pmatrix}$ 1p

Pentru $x = bp - cn$, $y = n(a - d) + b(q - m)$ și $z = c(m - q) + p(d - a)$ rezultă cerința 2p

Pentru $D(A, B)$ găsit anterior identifică $\alpha = x^2 + y \cdot z$ astfel că $D^2(A, B) = \alpha \cdot I_2$ 2p

3. Se consideră funcțiile $f, g: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ iar $g(x) = x \cdot \cos x - \sin x$.

a) Verificați relația $x^2 \cdot f'(x) = g(x)$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Demonstrați că $g(x) < 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

c) Deduceți relația $\sin 1 > \frac{2}{\pi}$, utilizând eventual monotonia funcției f .

Soluție:

Obține $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, de unde rezultă cerința 2p

Obține $g'(x) = -x \cdot \sin x$ 1p

Pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ deduce că $g'(x) < 0$, deci funcția g este strict descrescătoare 1p

Finalizare: Deoarece funcția g este strict descrescătoare pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă că $g(x) < 0$,

pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 1p

Deoarece $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ iar $g(x) < 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă că $f'(x) < 0$, deci funcția f este

strict descrescătoare pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 1p

Folosind monotonia funcției f rezultă că $f(1) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \sin 1 > \frac{2}{\pi}$ 1p

4. O companie aviatică are în dotare 20 de aeronave. După frecvența cu care se efectuează zborurile spre o destinație, compania are destinațiile împărțite astfel: destinații spre care zboară zilnic, destinații spre care zboară odată la două zile și destinații spre care zboară odată la trei zile. Știind că luni au avut loc 20 de plecări, în primele trei zile au avut loc 46 de zboruri, iar numărul aeronavelor care execută curse zilnice este egal cu numărul aeronavelor care execută curse cu celelalte frecvențe la un loc, se cere:

a) Câte aeronave execută zboruri zilnic ?

b) Câte aeronave execută un zbor la trei zile ?

Soluție:

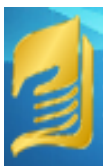
Notăm cu x numărul aeronavelor care zboară zilnic, cu y numărul aeronavelor care zboară odată la două zile și cu z numărul aeronavelor care zboară odată la trei zile. Scrie relațiile :

$x + y + z = 20$ 2p

$x = y + z$ și deduce că $x = 10$ 2p

$3x + 2y + z = 46$ 1p

Obține: $z = 4$ 2p



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + \hat{a} \cdot X + \hat{b} \in \mathbb{Z}_5[X]$
- Verificați relația $\hat{t}^4 = \hat{1}$, pentru orice $\hat{t} \in \mathbb{Z}_5$, $\hat{t} \neq \hat{0}$.
 - Câte polinoame de forma anterioară există ?
 - Demonstrați că pentru $\hat{b} = \hat{1}$ polinomul f este reducibil în $\mathbb{Z}_5[X]$, oricare ar fi $\hat{a} \in \mathbb{Z}_5$.

Soluție:

a) Pentru $\hat{t} \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$, se verifică prin calcul relația $\hat{t}^4 = \hat{1}$ 2p

b) Deoarece $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_5$, ele iau câte 5 valori, deci vor exista 25 de polinoame 2p

c) Exemplifică pentru fiecare situație că polinomul este reducibil, astfel :

Dacă $\hat{a} = \hat{0}$, polinomul se scrie astfel $f = (X^2 + \hat{3})(X^2 + \hat{2})$

Dacă $\hat{a} = \hat{1}$, polinomul se scrie astfel $f = (X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{4}X + \hat{3})(X + \hat{2})$

Dacă $\hat{a} = \hat{2}$, polinomul se scrie astfel $f = (X^3 + \hat{4}X^2 + X + \hat{1})(X + \hat{1})$

Dacă $\hat{a} = \hat{3}$, polinomul se scrie astfel $f = (X^3 + X^2 + X + \hat{4})(X + \hat{4})$

Dacă $\hat{a} = \hat{4}$, polinomul se scrie astfel $f = (X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{4}X + \hat{2})(X + \hat{3})$ 3p

2. Fie $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{e^{3^n \cdot x}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ iar $I_n = \int_0^{\frac{1}{3^n}} f_n(x) dx$.

a) Verificați egalitatea $3f_{n+1}(x) = f_n(3x)$, pentru orice număr natural nenul n .

b) Calculați I_1 .

c) Demonstrați că $I_{n+1} = \frac{1}{9} \cdot I_n$, utilizând relația de la punctul (a).

Soluție:

a) Se obține cu ușurință că $f_n(3x) = \frac{3x}{e^{3^n \cdot 3x}} = 3 \cdot \frac{x}{e^{3^{n+1} \cdot x}} = 3 \cdot f_{n+1}(x)$ 2p

b) $I_1 = \int_0^{\frac{1}{3}} f_1(x) dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{x}{e^{3x}} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} x \cdot e^{-3x} dx = x \cdot \left(\frac{e^{-3x}}{-3} \right) \Big|_0^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{3}} e^{-3x} dx = x \cdot \left(\frac{e^{-3x}}{-3} \right) \Big|_0^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{e^{-3x}}{-9} \right) \Big|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{9} \cdot \left(1 - \frac{2}{e} \right)$ 2p

c) $I_{n+1} = \int_0^{\frac{1}{3^{n+1}}} f_{n+1}(x) dx = \int_0^{\frac{1}{3^{n+1}}} f_n(3x) dx$ 1p

Notând $t = 3x$, deducem $I_{n+1} = \frac{1}{9} \cdot \int_0^{\frac{1}{3^n}} f_n(t) dt = \frac{1}{9} \cdot I_n$ 2p

3. Se consideră inelul comutativ $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$.

a) Aflați suma elementelor nenule ale mulțimii $\mathbb{Z}_{10}$.

b) Elementele nenule ale mulțimii $\mathbb{Z}_{10}$ se organizează în următorul tablou pătratic $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{4} & \hat{5} & \hat{6} \\ \hat{7} & \hat{8} & \hat{9} \end{pmatrix}$.

Din tablou se scot 3 elemente, câte unul de pe fiecare linie și coloană. Determinați suma elementelor rămase în tablou.

Soluție:

a) $S = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \dots + \hat{9} = \hat{5}$ 2p

b) Gândind tabloul ca având forma $\begin{pmatrix} a & b & c \\ \hat{3}+a & \hat{3}+b & \hat{3}+c \\ \hat{6}+a & \hat{6}+b & \hat{6}+c \end{pmatrix}$ cu $a = \hat{1}$, $b = \hat{2}$, $c = \hat{3}$ suma elementelor

scoase după regula dată va fi $\hat{3} + \hat{6} + a + b + c = \hat{5}$ 3p

Suma elementelor rămase va fi egală cu $\hat{0}$ 2p

4. Un grup de prieteni, n fete și 4 băieți, au ieșit la iarbă verde. Au disputat câte o partidă de badminton, fiecare cu fiecare, iar în urma confruntărilor fetele au câștigat de două ori în fața băieților. Știind că raportul dintre numărul total al victoriilor fetelor și numărul total al victoriilor băieților este de $\frac{5}{16}$, se cere:

a) Câte partide au disputat băieții ?

b) Câte fete erau în grup ?

Soluție:

a) Băieții au disputat $4n$ partide cu fetele și încă 6 partide între ei, în total $4n + 6$ partide 2p

b) Fetele au câștigat $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ partide disputate între ele și încă 2 2p

Băieții au câștigat $6 + 4n - 2$ partide 1p

Din relația $\frac{\frac{n(n-1)}{2} + 2}{4n + 4} = \frac{5}{16}$, obținem $n = 3$ 2p