

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013

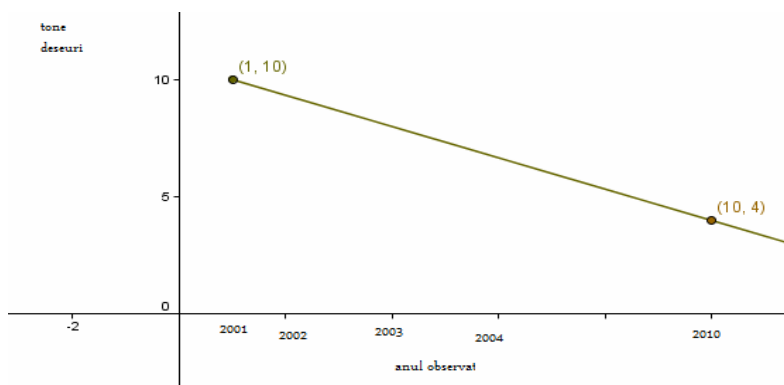
Filiera tehnologică : profil tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

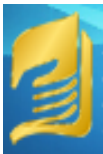
CLASA A IX-A

1. Deșeurile colectate și apoi prelucrate dintr-un oraș au scăzut constant, conform graficului următor, începând cu anul 2001. Estimați în ce an, datorită măsurilor de protecție a mediului, acestea vor ajunge, după prelucrare, la nivelul 0.



2. Se consideră mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + ax + b - 1 = 0\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + bx + a - 1 = 0\}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.
- a) Demonstrați că, dacă x și y sunt numere reale astfel încât $x + y \geq 0$, atunci $x \geq 0$ sau $y \geq 0$.
 - b) Demonstrați că $a^2 - 4(b - 1) + b^2 - 4(a - 1) \geq 0$, pentru orice numere reale a și b .
 - c) Demonstrați că mulțimea $A \cup B$ este nevidă.
3. Să se determine numerele întregi a, b, c știind că în această ordine sunt în progresie aritmetică de rație 3, iar a^2, b^2, c^2 sunt în progresie geometrică, nu neapărat în această ordine.
4. Se consideră trapezul ABCD, cu bazele (AB) și (CD) în care $AB = 8, CD = 4, AD = 6, m(\hat{A}) = 60^\circ$, iar punctul E este mijlocul laturii AD.
- 1) Să se determine lungimea diagonalei BD.
 - 2) Calculați mărimea vectorului $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BC}$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013

Filiera tehnologică : profil tehnic

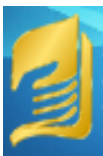


FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

1. a) Să se verifice egalitatea $\frac{1}{\log_{x^n \cdot y^m} A} = \frac{n}{\log_x A} + \frac{m}{\log_y A}$, unde $A > 1$, $x, y > 1$ iar $m, n \in \mathbb{R}^*$.
b) Dacă $a = \log_{18} N$ și $b = \log_{12} N$, să se exprime $\log_2 N$ și $\log_3 N$ în funcție de a și b .
2. Pentru un triunghi ABC se cunosc: coordonatele unui vârf $A(9, -9)$, ale centrului de greutate $G(2, 0)$ și ale mijlocului unei laturi $N(-3, -3)$.
a) Demonstrați că punctele A, G, N nu sunt coliniare.
b) Determinați coordonatele vârfului triunghiului coliniar cu A și N.
c) Determinați ecuația laturii BC.
3. Pentru a înveseli atmosfera cei patru colegi de birou au hotărât să organizeze o tombolă cu ocazia Crăciunului. Astfel fiecare a adus câte un cadou, cadourile au fost numerotate cu numere de la 1 la 4, iar prin extragerea unuia dintre cele patru bilețele pe care erau scrise numerele de la 1 la 4 să își aleagă cadoul numerotat cu respectivul număr.
a) În câte moduri se pot numerota cele patru cadouri?
b) În câte dintre situațiile posibile nici o persoană nu primește cadoul cumpărat de ea?
4. Se consideră funcția $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n(x) = (1+x)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$
a) Calculați $f_6(i) + f_6(-i)$.
b) Demonstrați că dacă există $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|f_{2013}(z)| = |f_{2013}(-z)|$, atunci $z \in i \cdot \mathbb{R}$.
c) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ știind că $(C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots)^2 = 1024$, calculând eventual $f_n(i) \cdot f_n(-i)$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013

Filiera tehnologică : profil tehnic

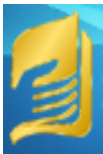


FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XI-A

- Spunem că matricea $A \in M_3(\mathbb{R})$ se numește *perturbată* dacă are exact patru elemente egale cu 0 care formează un minor de ordinul al doilea construit cu liniile 1 și 2 ale matricei, iar celelalte elemente sunt diferite între ele.
 - Dați exemplu de o matrice *perturbată*.
 - Să se demonstreze că orice matrice *perturbată* nu este inversabilă.
 - Câte matrice perturbate având restul elementelor cifre se pot construi ?
- Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ definim matricea $D(A, B) = A \cdot B - B \cdot A$
 - Verificați $D(A, A) = D(A, I_2)$
 - Demonstrați că există $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $D(A, B) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$.
 - Demonstrați că $D^2(A, B)$ este de forma $\alpha \cdot I_2$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Se consideră funcțiile $f, g: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ iar $g(x) = x \cdot \cos x - \sin x$.
 - Verificați relația $x^2 \cdot f'(x) = g(x)$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
 - Demonstrați că $g(x) < 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
 - Deduceți relația $\sin 1 > \frac{2}{\pi}$, utilizând eventual monotonia funcției f .
- O companie aviatică are în dotare 20 de aeronave. După frecvența cu care se efectuează zborurile spre o destinație, compania are destinațiile împărțite astfel: destinații spre care zboară zilnic, destinații spre care zboară odată la două zile și destinații spre care zboară odată la trei zile. Știind că luni au avut loc 20 de plecări, în primele trei zile au avut loc 46 de zboruri, iar numărul aeronavelor care execută curse zilnice este egal cu numărul aeronavelor care execută curse cu celelalte frecvențe la un loc, se cere:
 - Câte aeronave execută zboruri zilnic ?
 - Câte aeronave execută un zbor la trei zile ?

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
12 aprilie 2013

Filiera tehnologică : profil tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XII-A

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + \hat{a} \cdot X + \hat{b} \in \mathbb{Z}_5[X]$
- Verificați relația $\hat{t}^4 = \hat{1}$, pentru orice $\hat{t} \in \mathbb{Z}_5$, $\hat{t} \neq \hat{0}$.
 - Câte polinoame de forma anterioară există ?
 - Demonstrați că pentru $\hat{b} = \hat{1}$ polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_5[X]$, oricare ar fi $\hat{a} \in \mathbb{Z}_5$.

2. Fie $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{e^{3^n \cdot x}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ iar $I_n = \int_0^{\frac{1}{3^n}} f_n(x) dx$.

- Verificați egalitatea $3f_{n+1}(x) = f_n(3x)$, pentru orice număr natural nenul n .
- Calculați I_1 .
- Demonstrați că $I_{n+1} = \frac{1}{9} \cdot I_n$, utilizând relația de la punctul (a).

3. Se consideră inelul comutativ $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$.

- Aflați suma elementelor nenule ale mulțimii $\mathbb{Z}_{10}$.

- Elementele nenule ale mulțimii $\mathbb{Z}_{10}$ se organizează în următorul tablou pătratic $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{4} & \hat{5} & \hat{6} \\ \hat{7} & \hat{8} & \hat{9} \end{pmatrix}$.

Din tablou se scot 3 elemente, câte unul de pe fiecare linie și coloană. Determinați suma elementelor rămase în tablou.

4. Un grup de prieteni, n fete și 4 băieți, au ieșit la iarbă verde. Au disputat câte o partidă de badminton, fiecare cu fiecare, iar în urma confruntărilor fetele au câștigat de două ori în fața băieților. Știind că raportul dintre numărul total al victoriilor fetelor și numărul total al victoriilor băieților este de $\frac{5}{16}$, se cere:
- Câte partide au disputat băieții ?
 - Câte fete erau în grup ?

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.