

VARIANTA 1

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $C_3^2 + 3!$.
- 5p 2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_5(3x+4)=2$.
- 5p 3. Să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - x - 2 = 0$.
- 5p 4. Se consideră funcția $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$. Să se determine mulțimea valorilor funcției f .
- 5p 5. Fie punctele $A(2, -1)$ și $B(-1, 3)$. Să se determine numerele reale a și b astfel încât $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 4$, $AC = \sqrt{7}$ și $BC = \sqrt{3}$. Să se calculeze măsura unghiului B .

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sunt soluțiile ecuației $x^3 - 3x + 2 = 0$.
- 5p a) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$.
- 5p b) Să se arate că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$.
- 5p c) Să se calculeze valoarea determinantului d .
2. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.
- 5p a) Să se verifice că $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se calculeze $x \circ (-4)$, unde x este număr real.
- 5p c) Știind că operația „ $\circ$ ” este asociativă, să se calculeze $(-2009) \circ (-2008) \circ \dots \circ 2008 \circ 2009$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.
- 5p a) Să se calculeze derivata funcției f .
- 5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
- 5p c) Să se demonstreze că $f(x) \leq -4$ pentru orice $x < -1$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + e^x, & x \leq 0 \\ \sqrt{x} + 1, & x > 0 \end{cases}$.
- 5p a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
- 5p b) Să se calculeze $\int_{-1}^0 x f(x) dx$.
- 5p c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

VARIANTA 2

	SUBIECTUL I (30p)
5p	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$. Să se determine $f(-4) \cdot f(-3) \cdot \dots \cdot f(3) \cdot f(4)$.
5p	2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x+2) + \log_2 x = 3$.
5p	3. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi inecuația $x^2 - 5x + 5 \leq 1$.
5p	4. Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ numerele $3^x - 1$, 3^{x+1} și $5 \cdot 3^x + 1$ sunt termeni consecutivi într-o progresie aritmetică.
5p	5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, -8)$ și $B(6, 3)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
5p	6. Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că $AC = 2$, $m(\angle BAC) = 30^\circ$ și $AB = 4$.
	SUBIECTUL II (30p)
	1. Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.
5p	a) Pentru $a = 2$, $b = 1$ și $c = -1$, să se calculeze determinantul d .
5p	b) Să se verifice că $d = \frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$.
5p	c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\begin{vmatrix} 2^x & 3^x & 5^x \\ 5^x & 2^x & 3^x \\ 3^x & 5^x & 2^x \end{vmatrix} = 0$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$.
5p	a) Să se arate că $x \circ y = 2(x-3)(y-3) + 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
5p	b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = 11$.
5p	c) Știind că operația " $\circ$ " este asociativă, să se calculeze $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \dots \circ \sqrt{2009}$.
	SUBIECTUL III (30p)
	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - e^{-x}$.
5p	a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
5p	b) Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
5p	c) Să se calculeze $S = g(0) + g(1) + \dots + g(2009)$, unde $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f'(x) - f''(x)$.
	2. Se consideră funcțiile $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$ și $F(x) = (x-1)e^x$.
5p	a) Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f .
5p	b) Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = 1$.
5p	c) Să se demonstreze că $\int_1^x \frac{f(t)f''(t) - (f'(t))^2}{f^2(t)} dt = \frac{x+1}{x} - 2$, pentru orice $x > 1$.

VARIANTA 3

	SUBIECTUL I (30p)
5p	1. Să se determine al zecelea termen al șirului 1, 7, 13, 19,
5p	2. Se consideră toate numerele naturale de trei cifre scrise cu elemente din mulțimea $\{1, 2\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un astfel de număr, acesta să fie divizibil cu 3.
5p	3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\sqrt{2+x} = x$.
5p	4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Să se calculeze $f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1)$.
5p	5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele $A(2, -1)$ și $B(1, -2)$.
5p	6. Să se calculeze aria triunghiului ABC , știind că $AB = AC = \sqrt{2}$, $m(\angle A) = 30^\circ$.
	SUBIECTUL II (30p)
	1. Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sunt soluțiile ecuației $x^3 - 2x = 0$.
5p	a) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$.
5p	b) Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.
5p	c) Să se calculeze determinantul d .
	2. Se consideră polinoamele cu coeficienți reali $f = X^4 + aX^3 - 28X^2 + bX + 96$, $g = X^2 + 2X - 24$ și $h = (X^2 + 2X - 24)(X^2 - 4)$.
5p	a) Să se scrie forma algebrică a polinomului h .
5p	b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât polinoamele f și h să fie egale.
5p	c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x + 2 \cdot 8^x - 28 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 96 = 0$.
	SUBIECTUL III (30p)
	1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.
5p	a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$, pentru orice $x \in (0; +\infty)$.
5p	b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
5p	c) Să se demonstreze că $3^{\sqrt{5}} \leq 5^{\sqrt{3}}$.
	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e \cdot e^x, & x \leq -1 \\ 2 + x, & x > -1 \end{cases}$.
5p	a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
5p	b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$, $x \in [0, 2]$.
5p	c) Să se calculeze $\int_{-2}^0 \frac{x f(x)}{e} dx$.

VARIANTA 4

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine soluțiile întregi ale inecuației $(x-1)^2 + x - 7 < 0$.
- 5p 2. Să se calculeze suma primilor 5 termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = 1$ și $a_2 = 3$.
- 5p 3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - 8x - 3$, unde m este un număr real nenul. Să se determine m știind că valoarea maximă a funcției f este egală cu 5.
- 5p 4. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x+2) - \log_2(x-5) = 3$.
- 5p 5. Să se determine numărul real a știind că vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + a\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} + (a-2)\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p 6. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC , știind că $AB = 3$ și $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_2 + aA$, unde $a \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Să se calculeze A^3 , unde $A^3 = A \cdot A \cdot A$.
- 5p b) Să se verifice dacă $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+ab)$, oricare ar fi numerele $a, b \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Să se calculeze suma $X(1) + X(2) + X(3) + \dots + X(2009)$.
2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$.
- 5p a) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ ecuația $\hat{2}x + \hat{5} = \hat{1}$.
- 5p b) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_6$.
- 5p c) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ sistemul de ecuații $\begin{cases} \hat{2}x + y = \hat{4} \\ x + \hat{2}y = \hat{5} \end{cases}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^{-x}$.
- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se arate că f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și crescătoare pe $[0, +\infty)$.
- 5p c) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f .
2. Se consideră funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x+1)^3 - 3x^2 - 1$.
- 5p a) Să se calculeze $\int_0^1 g(x) dx$.
- 5p b) Să se determine numărul real $a > 1$ astfel încât $\int_1^a (g(x) - x^3) \cdot e^x dx = 6e^a$.
- 5p c) Să se calculeze $\int_0^1 (3x^2 + 3) \cdot g^{2009}(x) dx$.

VARIANTA 5

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine numărul elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x+1| \leq 2\}$.
- 5p 2. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[3]{30}\}$, acesta să fie număr rațional.
- 5p 3. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x - 1$. Să se determine soluția reală a ecuației $2f(x) + 3g(x) = -5$.
- 5p 4. După o reducere cu 20 %, prețul unui produs este 320 de lei. Să se determine prețul produsului înainte de reducere.
- 5p 5. În reperul cartezian $(O, \vec{i}, \vec{j})$ se consideră vectorii $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v} = 5\vec{i} - \vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $5\vec{u} + 3\vec{v}$.
- 5p 6. Fie triunghiul dreptunghic ABC și D mijlocul ipotenuzei BC . Să se calculeze lungimea laturii AB , știind că $AC = 6$ și $AD = 5$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Se notează $A^2 = A \cdot A$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se determine x real, știind că $\det(A) = 0$.
- 5p b) Să se verifice egalitatea $A^2 = (2x-6)A - (x^2 - 6x + 8) \cdot I_2$.
- 5p c) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $A^2 = 2A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - 2(x+y) + 6$.
- 5p a) Să se arate că $x \circ y = (x-2)(y-2) + 2$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se demonstreze că $x \circ 2 = 2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Știind că legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei $E = (-2009) \circ (-2008) \circ \dots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \dots \circ 2009$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2009} - 2009(x-1) - 1$.
- 5p a) Să se calculeze $f(0) + f'(0)$.
- 5p b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(0;1)$.
- 5p c) Să se arate că funcția f este convexă pe $[0; +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^{-x}$.
- 5p a) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.
- 5p b) Folosind faptul că $x^2 + e^{-x^2} \geq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, să se demonstreze că $\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \frac{2}{3}$.
- 5p c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f(-x)$.

VARIANTA 6

- SUBIECTUL I (30p)**
- 5p 1. Să se calculeze $a^2 + b^2$, știind că numerele a și b au suma egală cu 4 și produsul egal cu 3.
- 5p 2. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$ și $g(x) = x + 4$. Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor f și g .
- 5p 3. Să se determine valorile reale pozitive ale numărului x , știind că $\lg \sqrt{x}$, $\frac{3}{2}$ și $\lg x$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots, \sqrt{10}\}$, acesta să fie rațional.
- 5p 5. Să se determine numărul real a , știind că dreptele $2x - y + 3 = 0$ și $ax + 2y + 5 = 0$ sunt paralele.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 1$, $AC = 2$ și $BC = \sqrt{5}$. Să se calculeze $\cos B$.

- SUBIECTUL II (30p)**
- 5p 1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n, 2^n)$, $n \in \mathbb{N}$.
- 5p a) Să se demonstreze că punctele O, A_1, A_2 sunt coliniare.
- 5p b) Să se determine numărul de drepte care trec prin cel puțin două dintre punctele O, A_0, A_1, A_2 .
- 5p c) Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele A_n, A_{n+1}, A_{n+2} , $n \in \mathbb{N}$.
2. Se consideră mulțimea $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{Z}\}$, unde matricea $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{Z}$.
- 5p a) Să se verifice că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.
- 5p b) Știind că mulțimea G împreună cu operația de înmulțire a matricelor formează o structură de grup, să se determine elementul neutru al grupului $(G, \cdot)$.
- 5p c) Să se arate că funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow G$, $f(x) = A_x$ este morfism între grupurile $(\mathbb{Z}, +)$ și $(G, \cdot)$.

- SUBIECTUL III (30p)**
1. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}$.
- 5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 5p b) Să se verifice că $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$, oricare ar fi $x \geq 0$.
- 5p c) Să se demonstreze că $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 2$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x + 1$.
- 5p a) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
- 5p b) Să se calculeze $\int_0^1 x f(x) dx$.
- 5p c) Să se demonstreze că $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = e + \frac{1}{3}$.

VARIANTA 7

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_1x_2$, știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 2x - 2 = 0$.
- 5p 2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - 4x$. Să se determine soluțiile reale ale inecuației $f(x) - 1 \geq 4x$.
- 5p 3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $3^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}$.
- 5p 4. Să se calculeze $\log_3 27 - \log_2 8$.
- 5p 5. Se consideră punctele $A(1, a)$, $B(2, -1)$, $C(3, 2)$ și $D(1, -2)$. Să se determine numărul real a , știind că dreptele AB și CD sunt paralele.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 5$, $AC = 6$ și $BC = 7$. Să se calculeze $\cos A$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se calculeze matricea B^2 , unde $B^2 = B \cdot B$.
- 5p b) Să se verifice că $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Să se arate că $C^4 = 6^4 \cdot I_2$, unde $C = B^2 + A^{-1}$ și $C^4 = C \cdot C \cdot C \cdot C$.
2. Fie polinoamele $f = X^3 + aX^2 + X + \hat{1}$ și $g = X + \hat{3}$ din inelul $\mathbb{Z}_5[X]$.
- 5p a) Să se determine $a \in \mathbb{Z}_5$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g .
- 5p b) Pentru $a = \hat{1}$ să se arate că $f = (X + \hat{1})(X^2 + \hat{1})$.
- 5p c) Pentru $a = \hat{1}$ să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ ecuația $f(x) = \hat{0}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x^2$.
- 5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- 5p b) Să se demonstreze că funcția f nu are asimptotă către $+\infty$.
- 5p c) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.
2. Se consideră funcția $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(1 + \ln x)}$.
- 5p a) Să se calculeze $\int_1^e f'(x) dx$.
- 5p b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $[1, +\infty)$.
- 5p c) Să se determine numărul real $a \in (1, e^2)$ astfel încât aria suprafeței plane, determinate de graficul funcției f , axa Ox , dreptele de ecuații $x = a$ și $x = e^2$, să fie egală cu $\ln \frac{3}{2}$.

VARIANTA 8

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine suma elementelor mulțimii $A = \{1, 3, 5, \dots, 13\}$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Să se determine punctul care aparține graficului funcției f și are abscisa egală cu ordonata.
- 5p 3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $2^x + 2^{x+3} = 36$.
- 5p 4. Să se calculeze $A_4^4 + C_4^4$.
- 5p 5. Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(1, 1)$ și este paralelă cu dreapta $4x + 2y + 5 = 0$.
- 5p 6. Să se calculeze $\sin^2 130^\circ + \cos^2 50^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Definim matricele $A = X \cdot Y^t$ și
- $B(a) = aA + I_3$, unde $a \in \mathbb{R}$ și Y^t este transpusa matricei Y .
- 5p a) Să se arate că matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$.
- 5p b) Să se calculeze determinantul matricei A .
- 5p c) Să se arate că matricea $B(a)$ este inversabilă, oricare ar fi $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{4} \right\}$.
2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = (\hat{3}a + \hat{3}b)X^2 + \hat{2}X + \hat{2}a + \hat{3}b$ și $g = \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{3}a + \hat{2}b$.
- 5p a) Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_5$ astfel încât cele două polinoame să fie egale.
- 5p b) Pentru $a = b = \hat{2}$ să se calculeze în $\mathbb{Z}_5$ suma $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) + f(\hat{3}) + f(\hat{4})$.
- 5p c) Pentru $a = b = \hat{2}$ să se rezolve în $\mathbb{Z}_5$ ecuația $f(x) = \hat{0}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \setminus \{e\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$.
- 5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
- 5p b) Să se verifice că $f'(x) = \frac{2}{x(1 - \ln x)^2}$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty) \setminus \{e\}$.
- 5p c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .
2. Se consideră funcțiile $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ și $g(x) = \frac{1}{x}$.
- 5p a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției $f + g$.
- 5p b) Să se arate că $\int_1^2 (f^2(x) + g^2(x)) dx = \frac{e^4 - e^2 + 1}{2}$.
- 5p c) Folosind eventual faptul că $2ab \leq a^2 + b^2$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, să se demonstreze că
- $$\int_1^2 e^x \cdot \frac{1}{x} dx \leq \frac{e^4 - e^2 + 1}{4}.$$

VARIANTA 9

	SUBIECTUL I (30p)
5p	1. Să se verifice că $\log_3 9 - \log_2 8 = \log_4 \frac{1}{4}$.
5p	2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^2 + 2mx + 4m = 0$ să aibă soluții reale.
5p	3. Să se rezolve în mulțime numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2 - x - 3} = -1$.
5p	4. O sumă de 1000 de lei a fost depusă la o bancă și după un an s-a obținut o dobândă de 80 de lei. Să se calculeze rata dobânzii.
5p	5. Să se determine coordonatele punctului B , știind că $A(3, 4)$ și $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + \vec{j}$.
5p	6. Să se calculeze aria unui paralelogram $ABCD$, știind că $AB = 3$, $AD = \sqrt{3}$ și $m(\sphericalangle BAD) = 120^\circ$.
	SUBIECTUL II (30p)
	1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5p	a) Să se determine numerele întregi a, b, c, d astfel încât $A + 2I_2 = O_2$.
5p	b) Să se calculeze determinantul matricei $B = A - A^t$.
5p	c) Să se arate că, dacă $A + A^t = 2I_2$, atunci determinantul matricei $A - A^t$ este un număr divizibil cu 4.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = (x - 4)(y - 4) + 4$.
5p	a) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție.
5p	b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x \circ x = x$.
5p	c) Să se determine două numere $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{N}$.
	SUBIECTUL III (30p)
	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(ax^2 + bx + c)$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.
5p	a) Pentru $a = 1, b = c = 0$, să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
5p	b) Să se verifice că $f'(0) - f(0) = b$.
5p	c) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ și $f''(0) = 4$.
	2. Se consideră integralele $I_n = \int_0^1 \frac{x^n + 1}{x + 1} dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
5p	a) Să se calculeze I_1 .
5p	b) Folosind, eventual, faptul că $x^2 \leq x$ pentru orice $x \in [0, 1]$, să se demonstreze că $I_2 \leq I_1$.
5p	c) Să se demonstreze că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1} + 2\ln 2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

VARIANTA 10

	SUBIECTUL I (30p)
5p	1. Să se determine al patrulea termen al unei progresii geometrice, știind că rația este egală cu $\frac{1}{3}$ și primul termen este 27.
5p	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $f^2(x) + 2f(x) - 3 = 0$.
5p	3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$.
5p	4. Să se compare numerele $a = C_4^1 + C_4^3$ și $b = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3$.
5p	5. Se consideră vectorii $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $\vec{w} = 2\vec{v} - 3\vec{u}$.
5p	6. Se consideră triunghiul ABC , având aria egală cu 15. Să se calculeze $\sin A$, știind că $AB = 6$ și $AC = 10$.
	SUBIECTUL II (30p)
	1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Se notează $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{\text{de } n \text{ ori}}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.
5p	a) Să se calculeze determinantul matricei A .
5p	b) Să se arate că $A^2 + A^3 = O_2$.
5p	c) Să se calculeze suma $A + 2 \cdot A^2 + \dots + 10 \cdot A^{10}$.
	2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X - 1)^{10} + (X - 2)^{10}$ și $g = X^2 - 3X + 2$.
5p	a) Să se descompună polinomul g în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.
5p	b) Să se demonstreze că polinomul f nu este divizibil cu polinomul g .
5p	c) Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
	SUBIECTUL III (30p)
	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \geq 1 \\ -x^2 + x, & x < 1 \end{cases}$.
5p	a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 1$.
5p	b) Să se calculeze $f'(0) + f'(2)$.
5p	c) Să se demonstreze că funcția f este concavă pe $(-\infty; 1)$.
	2. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}$ și $g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}$.
5p	a) Să se verifice că funcția g este o primitivă a funcției f .
5p	b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)g(x) dx$.
5p	c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f'(x)g'(x) dx = \int_0^1 f(x)g(x) dx$.

VARIANTA 11

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $C_5^4 + A_5^4$.
- 5p 2. Să se calculeze suma $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4}$.
- 5p 3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Să se determine numerele reale a și b știind că $3f(x) + 2 = 3x + 5$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.
- 5p 4. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_3(x^2 - 2x) = \log_3(2x - 3)$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(-1, 1)$, $C(3, 5)$ și $D(5, a)$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine a , știind că $AB \parallel CD$.
- 5p 6. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC știind că $BC = 8$ și $m(\angle A) = 45^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ și $V = \begin{pmatrix} v & 9 \\ 1 & v \end{pmatrix}$ cu $v, x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Să se arate că dacă $X \cdot V = U$, atunci $x \cdot (v^2 - 9) = 0$.
- 5p b) Să se determine valorile reale ale numărului v pentru care determinantul matricei V este nenul.
- 5p c) Să se determine trei soluții distincte ale sistemului de ecuații $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 9x + 3y = 0 \end{cases}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} - 1$.
- 5p a) Să se demonstreze că $x \circ (-x) = -1$, oricare ar fi x real.
- 5p b) Să se arate că legea de compoziție " $\circ$ " este asociativă.
- 5p c) Să se calculeze $(-4) \circ (-3) \circ \dots \circ 3 \circ 4$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$.
- 5p a) Să se verifice că $f'(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{2}{(x+1)^3}$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.
- 5p b) Să se demonstreze că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.
- 5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 f'(x)$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x$.
- 5p a) Să se calculeze $\int_1^e (f(x) - \frac{\ln x}{x}) dx$.
- 5p b) Să se verifice că $\int_1^e f(x) dx = \frac{e^2}{2}$.
- 5p c) Să se arate că șirul care are termenul general $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - x) dx$, $n \geq 1$ este o progresie aritmetică cu rația 1.

VARIANTA 12

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 25$. Să se calculeze $f(-5) \cdot f(-4) \cdot \dots \cdot f(0) \cdot \dots \cdot f(4) \cdot f(5)$.
- 5p 2. Să se rezolve ecuația $C_n^2 = 28$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- 5p 3. Știind că $\log_3 2 = a$, să se verifice dacă $\log_3 8 + \log_3 100 - \log_3 25 = 5a$.
- 5p 4. Să se determine soluțiile reale ale inecuației $\frac{2x+3}{x^2+x+1} \geq 1$.
- 5p 5. Să se determine ecuația dreptei care conține punctele $A(2,3)$ și $B(-3,-2)$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC de arie egală cu 6, cu $AB = 3$ și $BC = 8$. Să se calculeze $\sin B$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se notează cu $X \cdot X = X^2$.
- 5p a) Să se verifice că $A = I_3 + B$.
- 5p b) Să se calculeze suma $A^2 + B^2$.
- 5p c) Să se calculeze inversa matricei A^2 .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 7(x+y) + 42$.
- 5p a) Să se calculeze $\sqrt{2} \circ (-\sqrt{2})$.
- 5p b) Să se verifice că $x \circ y = (x+7)(y+7) - 7$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Știind că legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă, să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x \circ x = x$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2 \ln x$.
- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.
- 5p c) Să se arate că $f(x) \geq \ln \frac{e^2}{4}$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcțiile $f_m: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = m^2 x^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$, unde $m \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Să se calculeze $\int_1^2 f_1(x) dx$.
- 5p b) Să se calculeze $\int_0^1 e^x f_0(x) dx$.
- 5p c) Să se determine $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\int_0^1 f_m(x) dx = \frac{3}{2}$.

VARIANTA 13

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine numărul tuturor submulțimilor de 2 elemente care se pot forma cu elemente din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$ și $g(x) = x - 1$. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $f(x) = -g(x)$.
- 5p 3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_3(x^2 - 4x + 4) = 2$.
- 5p 4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că parabola asociată funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + m - 1$ este tangentă axei Ox .
- 5p 5. Să se calculeze aria triunghiului echilateral ABC știind că $A(-1, 1)$ și $B(3, -2)$.
- 5p 6. Să se calculeze $\cos x$, știind că $\sin x = \frac{4}{5}$ și x este măsura unui unghi ascuțit.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $D(a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Să se calculeze determinantul $D(9)$.
- 5p b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D(a) = 0$.
- 5p c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D(3^x) = 0$.
2. Se consideră mulțimea $M = [k; +\infty) \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ și operația $x * y = xy - k(x + y) + k^2 + k$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Să se determine $k \in \mathbb{R}$ astfel încât $2 * 3 = 2$.
- 5p b) Pentru $k = 2$ să se rezolve în M ecuația $x * x = 6$.
- 5p c) Să se demonstreze că pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x * y \in M$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.
- 5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Să se demonstreze că $f(x) \geq 1$, pentru orice $x > -1$.
2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră $I_n = \int_e^{e^2} \frac{\ln^n x}{x} dx$.
- 5p a) Să se verifice că $I_0 = 1$.
- 5p b) Să se calculeze I_1 .
- 5p c) Folosind, eventual, faptul că $1 \leq \ln x \leq 2$ oricare ar fi $x \in [e, e^2]$, să se demonstreze că $1 \leq \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \leq 2^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

VARIANTA 14

	SUBIECTUL I (30p)
5p	1. Să se demonstreze că dacă $a \in \mathbb{R}^*$, atunci ecuația $ax^2 - (2a+1)x + a+1 = 0$ are două soluții reale distincte.
5p	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 11x + 30$. Să se calculeze $f(0) \cdot f(1) \cdot \dots \cdot f(6)$.
5p	3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+3} - 2^x = 28$.
5p	4. Să se efectueze $A_6^2 - 2C_6^4$.
5p	5. Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele $A(2,3)$ și $B(5,-1)$.
5p	6. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC știind că $AB = 2$, $BC = 4$ și $m(\angle B) = 60^\circ$.
	SUBIECTUL II (30p)
	1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{\text{de } n \text{ ori}}$.
5p	a) Să se calculeze $A^2 + A$.
5p	b) Știind că $A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, să se rezolve ecuația $\det(A^n) = 2 \cdot 5^n - 125$.
5p	c) Să se determine transpusa matricei $B = A + A^2 + \dots + A^{2009}$.
	2. Se consideră polinomul $f = X^4 + mX^2 + n$, unde $m, n \in \mathbb{R}$. Rădăcinile polinomului sunt x_1, x_2, x_3, x_4 .
5p	a) Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$, știind că polinomul f admite rădăcinile $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$.
5p	b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile polinomului să verifice relația $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2$.
5p	c) Pentru $m = 1$ și $n = 1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.
	SUBIECTUL III (30p)
	1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
5p	a) Să se calculeze $f'(e)$.
5p	b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ a graficului funcției f .
5p	c) Să se demonstreze că $x^e \leq e^x$, pentru orice $x > 0$.
	2. Se consideră funcția $f: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$.
5p	a) Să se calculeze $\int_0^4 f^2(x) dx$.
5p	b) Să se verifice că $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{f(x)} dx = 0$.
5p	c) Să se demonstreze că $0 \leq \int_0^m f(x) dx \leq 8$, oricare ar fi $m \in [0, 2]$.

VARIANTA 15

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$.
- 5p 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $125^x = \frac{1}{5}$.
- 5p 3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5x + m + 6$. Să se determine valorile reale ale lui m știind că $f(x) \geq 0$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.
- 5p 4. Să se determine numărul real x , știind că $2^x - 1$, 4^x și $2^{x+1} + 3$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p 5. Să se calculeze $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$, știind că A , B și C sunt vârfurile unui triunghi.
- 5p 6. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC , știind că $AB = 5$, $AC = 4$ și $m(\angle A) = 60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 5p a) Să se verifice că $AB = BA$.
- 5p b) Să se calculeze $A^2 + B^2$, unde $A^2 = A \cdot A$ și $B^2 = B \cdot B$.
- 5p c) Să se arate că $C^4 = 5^4 \cdot I_2$, unde $C = A + B$ și $C^4 = C \cdot C \cdot C \cdot C$.
2. Se consideră polinoamele cu coeficienți raționali $f = X^4 + aX^3 + bX^2 - 5X + 6$ și $g = X^3 + X - 2$.
- 5p a) Să se determine $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g .
- 5p b) Pentru $a = -3$ și $b = 1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.
- 5p c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x} - 3^{2x+1} + 3^x - 5 + 6 \cdot 3^{-x} = 0$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = e^{-x} - 1$ și $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
- 5p a) Să determine $f_1(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ a graficului funcției f_0 .
- 5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x) + x - 1}{x^2}$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \sqrt{x^2 + 1}$.
- 5p a) Să se verifice că $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = e - 1$.
- 5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = xe^{-x} f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.
- 5p c) Să se calculeze $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x) dx$.

VARIANTA 16

	SUBIECTUL I (30p)
5p	1. Să se calculeze $C_8^3 - C_8^5$.
5p	2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x+5)=3$.
5p	3. Să se determine o ecuație de gradul al II-lea ale cărei soluții x_1 și x_2 verifică relațiile $x_1 + x_2 = 1$ și $x_1 x_2 = -2$.
5p	4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Să se calculeze $f(f(0)) - f(2)$.
5p	5. Să se determine coordonatele punctului C , simetricul punctului $A(5,4)$ față de punctul $B(-2,1)$.
5p	6. Triunghiul ABC are $AB = 3$, $AC = 4$ și $BC = 5$. Să se calculeze lungimea înălțimii duse din vârful A .
	SUBIECTUL II (30p)
	1. Se consideră sistemul $\begin{cases} mx + y + z = m^2 - 3 \\ 5x - 2y + z = -2 \\ (m+1)x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$, unde m este un parametru real.
5p	a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, știind că $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ m+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12$.
5p	b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită soluția $(1, 2, -3)$.
5p	c) Pentru $m = -1$ să se rezolve sistemul de ecuații.
	2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 9X^2 - X + 9$ care are rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.
5p	a) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 1$.
5p	b) Să se verifice că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 18$.
5p	c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f(3^x) = 0$.
	SUBIECTUL III (30p)
	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ x^2 + x + a, & x \geq 0 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.
5p	a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0 = 0$.
5p	b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(-1; \frac{1}{e} - 1\right)$.
5p	c) Să se arate că funcția f' este crescătoare pe $(0; +\infty)$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
	2. Se consideră $I_n = \int_2^3 \frac{x^n}{x^2 - 1} dx$, $n \in \mathbb{N}$.
5p	a) Să se verifice că $I_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.
5p	b) Să se calculeze I_1 .
5p	c) Să se demonstreze că $I_{n+2} - I_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

VARIANTA 17

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $2\log_3 4 - 4\log_3 2$.
- 5p 2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $2^{x-1} + 2^x = 12$.
- 5p 3. Să se determine numărul natural n , $n \geq 1$ știind că $A_n^1 + C_n^1 = 10$.
- 5p 4. Fie funcția $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 3$. Să se determine mulțimea valorilor funcției f .
- 5p 5. Se consideră triunghiul echilateral ABC înscris într-un cerc de centru O . Să se arate că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O}$.
- 5p 6. Să se calculeze $\sin 135^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n, 2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.
- 5p a) Să se determine ecuația dreptei A_1A_2 .
- 5p b) Să se calculeze aria triunghiului OA_1A_2 .
- 5p c) Să se arate că toate punctele $A_n(n, 2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$ sunt coliniare.
2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.
- 5p a) Să se verifice dacă $A(a) \cdot A(b) = A(2ab)$, oricare ar fi numerele reale a și b .
- 5p b) Să se arate că $A\left(\frac{1}{2}\right)$ este element neutru față de operația de înmulțire a matricelor pe M .
- 5p c) Să se determine simetricul elementului $A(1) \in M$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor pe mulțimea M .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.
- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.
- 5p b) Să se demonstreze că funcția f este descrescătoare pe $(0, 2]$.
- 5p c) Să se arate că $2e^{\sqrt{3}} \leq 3e^{\sqrt{2}}$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - x$.
- 5p a) Să se calculeze $\int_1^2 (x - f(x) + \ln x)^2 dx$.
- 5p b) Să se demonstreze că orice primitivă F a funcției f este concavă pe intervalul $(1, +\infty)$.
- 5p c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + x$, axa Ox și dreptele $x=1$ și $x=e$.

VARIANTA 18

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $\log_2 3 + \log_2 \frac{1}{3}$.
- 5p 2. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, acesta să verifice inegalitatea $n! < 50$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x - 14 \cdot 2^{-x} = -5$.
- 5p 4. Să se demonstreze că pentru orice număr real a , ecuația de gradul al doilea $x^2 - (2 \sin a)x + 1 - \cos^2 a = 0$ admite soluții reale egale.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}(2, -3)$ și $\overrightarrow{OB}(1, -2)$. Să se determine numerele reale α și β pentru care vectorul $3\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OB}$ are coordonatele (α, β) .
- 5p 6. Raza cercului circumscris triunghiului ABC este $\frac{3}{2}$, iar $BC = 3$. Să se calculeze $\sin A$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 = 1 \right\}$.
- 5p a) Să se verifice dacă matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și respectiv $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparțin mulțimii G .
- 5p b) Să se determine matricea $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} = aI_2 + bB$, oricare $a, b \in \mathbb{Z}$.
- 5p c) Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din G este tot o matrice din G .
2. Se consideră polinomul cu coeficienți raționali $f = X^3 + aX^2 - 5X + 14$ și suma $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
- 5p a) Să se determine numărul rațional a astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1 = -2$.
- 5p b) Pentru $a = -4$ să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- 5p c) Pentru $a = -4$ să se demonstreze egalitatea $S_3 + 42 = 4S_2 + 5S_1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2 + (x-1)^2$.
- 5p a) Să se verifice că $f'(x) = 4x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$.
- 5p c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.
2. Se consideră funcția $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + \ln x$.
- 5p a) Știind că $g: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \ln x$, să se verifice că $\int g(x) dx = g(x) + C$, $x > 0$.
- 5p b) Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.
- 5p c) Să se demonstreze că $\int_1^e x f(x^2) dx = \frac{e^{e^2} + e^2 - e + 1}{2}$.

VARIANTA 19

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $\log_6 24 - \log_6 4$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Să se calculeze $f(0) \cdot f(1) \cdot \dots \cdot f(2009)$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-5} = 2$.
- 5p 4. Să se determine numărul natural n , $n \geq 5$, știind că $\frac{(n-3)!}{(n-5)!} = 6$.
- 5p 5. Să se determine numerele reale a , știind că lungimea segmentului determinat de punctele $A(-1, 2)$ și $B(4-a, 4+a)$ este egală cu 5.
- 5p 6. Să se calculeze $\cos^2 45^\circ + \sin^2 135^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_n \left(\log_2 \left(\frac{1}{2} \right)^n, \log_3 9^n \right)$ și $B_n(-n, 2n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p a) Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele B_1 și B_2 .
- 5p b) Să se arate că $A_n = B_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p c) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, punctul A_n aparține dreptei A_1A_2 .
2. În mulțimea $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinoamele $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ și $g = X^2 - X - 1$.
- 5p a) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
- 5p b) Să se arate că dacă y este rădăcină a polinomului g , atunci $y^3 = 2y + 1$.
- 5p c) Să se demonstreze că dacă y este rădăcină a polinomului g , atunci $f(y)$ nu este număr rațional.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.
- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 5p c) Să se demonstreze că $0 < f(x) \leq \frac{1}{2e}$, pentru orice $x \in [\sqrt{e}, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$.
- 5p a) Să se calculeze $\int_1^e x \left(f(x) + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$.
- 5p b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $(0, +\infty)$.
- 5p c) Să se verifice că $\int_1^2 f'(x)f(x)dx = -\frac{22}{81}$.

VARIANTA 20

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $\log_3 6 + \log_3 2 - \log_3 4$.
- 5p 2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\sqrt{x^2 - x - 2} = 2$.
- 5p 3. Să se determine o ecuație de gradul al II-lea ale cărei soluții x_1 și x_2 verifică simultan relațiile $x_1 + x_2 = 2$ și $x_1 x_2 = -3$.
- 5p 4. Să se determine $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, știind că abscisa punctului de minim al graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (m-1)x^2 - (m+2)x + 1$ este egală cu 2.
- 5p 5. Să se determine distanța dintre punctele $A(3, -1)$ și $B(-1, 2)$.
- 5p 6. Să se determine numărul real x pentru care x , $x+7$ și $x+8$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n+2, 3n-2)$, $n \in \mathbb{N}$.
- 5p a) Să se scrie ecuația dreptei determinate de punctele A_1 și A_2 .
- 5p b) Să se calculeze aria triunghiului OA_0A_1 .
- 5p c) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, punctele A_1 , A_2 și A_n sunt coliniare.
2. Se consideră polinoamele $f = \hat{3}X^5 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X + \hat{4} \in \mathbb{Z}_5[X]$ și $g = \hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{3} \in \mathbb{Z}_5[X]$.
- 5p a) Să se calculeze $f(\hat{0}) + f(\hat{1})$.
- 5p b) Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{Z}_5$ ecuația $f(x) = \hat{0}$.
- 5p c) Să se determine câtul împărțirii polinomului f la polinomul g .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.
- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [0,1]$.
- 5p b) Să se arate că f este funcție crescătoare pe $[0,1]$.
- 5p c) Să se demonstreze că $\frac{3}{e} \leq \frac{1}{f(x)} \leq 2$, pentru orice $x \in [0,1]$.
2. Se consideră funcțiile $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$ și $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.
- 5p a) Să se arate că $F(x) = -f(x) + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se demonstreze că funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = F(x) - f(x)$ este concavă pe $\mathbb{R}$.
- 5p c) Să se calculeze $\int_0^1 x \cdot f(x^2) dx$.

VARIANTA 21

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\sqrt{x+1} = 5-x$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+3$. Să se calculeze $f(0) + f(1) + \dots + f(5)$.
- 5p 3. Să se determine mulțimea valorilor reale ale numărului x pentru care $-4 \leq 3x+2 \leq 4$.
- 5p 4. Să se calculeze distanța dintre punctele de intersecție ale graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ cu axa Ox .
- 5p 5. Dacă $\overline{AB} + 2\overline{CB} = \vec{0}$, să se determine valoarea raportului $\frac{AB}{BC}$.
- 5p 6. Să se calculeze aria triunghiului ABC , știind că $AB = 6$, $AC = 8$ și $BC = 10$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și funcția $f: \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(X) = X^2 - 3X + I_3$, unde $X^2 = X \cdot X$.
- 5p a) Să se calculeze $\det(I_3 + B)$.
- 5p b) Să se demonstreze că $f(A) = I_3 + B$.
- 5p c) Să se arate că $(f(A))^3 = I_3 + 3B + 3B^2$, unde $(f(A))^3 = f(A) \cdot f(A) \cdot f(A)$.
2. Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 3$ și $x \circ y = (x-3)(y-3) + 3$.
- 5p a) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $x \circ x = x * x$.
- 5p b) Să se determine numărul întreg a care are proprietatea că $x \circ a = 3$, oricare ar fi numărul întreg x .
- 5p c) Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} x * (y+1) = 4 \\ (x-y) \circ 1 = 5 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x-1}$.
- 5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Să se arate că $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 8$, oricare ar fi $x > 1$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x + 3^{-x}$.
- 5p a) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
- 5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3^{-x}$.
- 5p c) Să se arate că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $(-\infty, 0]$ și convexă pe $[0, +\infty)$.

VARIANTA 22

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

- 5p a) Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin G$.
- 5p b) Să se arate că pentru orice două matrice $A, B \in G$ are loc egalitatea $A \cdot B = B \cdot A$.
- 5p c) Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din G aparține mulțimii G .

2. Se consideră polinomul $f = mX^3 + 11X^2 + 7X + m$, $f \in \mathbb{R}[X]$.

- 5p a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $g = X - 1$.
- 5p b) Să se determine $m \in \mathbb{Q}$ astfel încât $f(\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$.
- 5p c) Pentru $m = -9$ să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului f .

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine numărul real x , știind că $x - 3$, 4 , $x + 3$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p 2. Să se calculeze distanța dintre punctele de intersecție ale graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8x + 7$ cu axa Ox .
- 5p 3. Să se arate că $E = \sqrt{1 + 3 + 5 + \dots + 21}$ este număr natural.
- 5p 4. Să se determine câte numere naturale de câte trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 1)$ și $B(-1, 2)$. Să se determine coordonatele punctului $C \in (AB)$ astfel încât $\frac{CA}{CB} = 2$.
- 5p 6. În triunghiul ABC măsura unghiului C este egală cu 60° , $AB = 4$ și $BC = 2$. Să se calculeze $\sin A$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - e \ln x$.

- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x)}{f'(x)}$.
- 5p c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .

2. Se consideră funcția $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$.

- 5p a) Să se calculeze $\int_2^e \left(f(x) - \frac{1}{x-1} \right) dx$.
- 5p b) Să se arate că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $[2; +\infty)$.
- 5p c) Să se determine a real, $a > 2$ astfel încât aria suprafeței plane, mărginite de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 2$ și $x = a$, să fie egală cu $\ln 3$.

VARIANTA 23

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine numărul întreg x care verifică inegalitățile $3 \leq \frac{2x-1}{2} \leq 4$.
- 5p 2. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a dreptei de ecuație $y = -4$ cu graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 6x + 5$.
- 5p 3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x-3) = 0$.
- 5p 4. Să se determine câte numere de două cifre se pot forma cu elementele mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}(2, -1)$ și $\overrightarrow{OB}(1, 2)$. Să se determine coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$, unde M este mijlocul segmentului AB .
- 5p 6. Să se calculeze $\sin 120^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(7, 4)$, $B(a, a)$ și $C(3, -2)$ unde $a \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Pentru $a = 0$ să se calculeze aria triunghiului ABC .
- 5p b) Pentru $a = -2$ să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele B și C .
- 5p c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele B , C și $M(x, -2)$ sunt coliniare, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + aX^3 + (a+3)X^2 + 6X - 4$ care are rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 .
- 5p a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$.
- 5p b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul să fie divizibil cu $X - \sqrt{2}$.
- 5p c) Pentru $a = -3$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$.
- 5p a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se determine punctele de extrem ale funcției f .
- 5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - 1 \right)$.
2. Se consideră funcțiile $f, F: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ și $F(x) = (x+1)\ln x - x + 1$.
- 5p a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .
- 5p b) Să se calculeze $\int_1^2 f(e^x) dx$.
- 5p c) Să se demonstreze că $\int_1^2 f(x)F(x) dx = \frac{(3\ln 2 - 1)^2}{2}$.

VARIANTA 24

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze suma $1 + 3 + 5 + \dots + 19$.
- 5p 2. Să se demonstreze că ecuația $x^2 - 2x + 1 + a^2 = 0$ nu admite soluții reale, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$.
- 5p 3. Să se determine valorile reale ale lui m , știind că valoarea minimă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = x^2 - mx + m - 1$ este egală cu $-\frac{1}{4}$.
- 5p 4. Să se ordoneze crescător numerele $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$, 64 și $\sqrt[3]{8}$.
- 5p 5. Fie ABC un triunghi echilateral înscris într-un cerc de centru O . Să se calculeze $\overline{AB} + \overline{AC} - 3\overline{AO}$.
- 5p 6. Să se calculeze aria triunghiului ABC , știind că $AB = \sqrt{3}$, $AC = 3$ și măsura unghiului A este egală cu 120° .

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x - 2y + 3z = -3 \\ 2x + y + z = 4 \\ mx - y + 4z = 1 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $(2, 1, -1)$ să fie o soluție sistemului.
- 5p b) Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ m & -1 & 4 \end{vmatrix} = m^2 - 3m$, unde $m \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Pentru $m = -5$ să se rezolve sistemul de ecuații.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - (m+1)X^2 - 3X + 3$, $f \in \mathbb{Q}[X]$.
- 5p a) Să se determine $m \in \mathbb{Q}$ astfel încât suma rădăcinilor polinomului f să fie egală cu 1.
- 5p b) Să se determine $m \in \mathbb{Q}$ astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1 = \sqrt{3}$.
- 5p c) Pentru $m = 0$ să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^4}{4} - \ln x$.
- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Să se determine punctul de extrem al funcției f .
- 5p c) Să se demonstreze că $\ln \sqrt{x} \leq \frac{x^2 - 1}{4}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Fie $I_n = \int_1^2 x^n e^x dx$, pentru $n \in \mathbb{N}$.
- 5p a) Să se calculeze I_0 .
- 5p b) Să se arate că $I_1 = e^2$.
- 5p c) Să se demonstreze că $(n+1)I_n + I_{n+1} = e(2^{n+1}e - 1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

VARIANTA 25

	SUBIECTUL I (30p)
5p	1. Să se calculeze $\lg 20 + \lg 3 - \lg 6$.
5p	2. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr natural de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.
5p	3. Să se determine mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{7-x} = 1$.
5p	4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, știind că soluțiile x_1, x_2 ale ecuației $x^2 - (2m+1)x + 3m = 0$ verifică relația $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 11$.
5p	5. Să se demonstreze că, în orice triunghi dreptunghic ABC de arie S și ipotenuză de lungime a , este adevărată identitatea $a^2 \sin B \sin C = 2S$.
5p	6. Să se calculeze $\sin 170^\circ - \sin 10^\circ$.
	SUBIECTUL II (30p)
	1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 1 \\ x + 4y + a^2z = 1 \end{cases}$ și matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
5p	a) Să se calculeze $\det(A(4))$.
5p	b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
5p	c) Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ să se rezolve sistemul.
	2. Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 - aX - 4$, $f \in \mathbb{R}[X]$.
5p	a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 = -2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile reale ale polinomului f .
5p	b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $X^2 - 2$.
5p	c) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ pentru care polinomul f are o rădăcină rațională pozitivă.
	SUBIECTUL III (30p)
	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.
5p	a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	b) Să se demonstreze că $f(x) \geq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
5p	c) Să se scrie ecuația asimptotei oblice către $-\infty$ la graficul funcției f .
	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$, unde $m, n, p \in \mathbb{R}$.
5p	a) Pentru $m = 0$, $n = -3$, $p = 2$, să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
5p	b) Să se determine $m, n, p \in \mathbb{R}$, știind că $f'(-1) = f'(1) = 0$ și $\int_{-1}^1 f(x) dx = 4$.
5p	c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} \int_0^x f(t) dt$.

VARIANTA 26

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_3 = 5$ și $a_6 = 11$. Să se calculeze a_9 .
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + x$. Să se calculeze $f(1) + f(2) + \dots + f(20)$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x+2} = 2^{x^2+5}$.
- 5p 4. Să se rezolve ecuația $C_{n+2}^{n+1} = 2$, unde $n \in \mathbb{N}$.
- 5p 5. Să se determine numărul real m pentru care vectorii $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{w} = -\vec{i} + m\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p 6. Să se calculeze $\cos 30^\circ + \cos 60^\circ + \cos 120^\circ + \cos 150^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$. Se notează $A^2 = A \cdot A$.
- 5p a) Să se calculeze A^2 .
- 5p b) Să se verifice că $A^2 = aI_2 + bA$.
- 5p c) Știind că $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ și $AX = XA$, să se arate că există $m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $X = mI_2 + nA$.
2. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 - X - 1$, unde $a \in \mathbb{Z}$.
- 5p a) Să se determine a știind că $x = 1$ este rădăcină a polinomului f .
- 5p b) Pentru $a = 1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f .
- 5p c) Să se demonstreze că $f(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$.
- 5p a) Să se calculeze derivata funcției f .
- 5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
- 5p c) Să se arate că $e^{x^2} + e^x \geq x^2 + x + 2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
2. Se consideră funcțiile $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \ln x$ și $g(x) = x \ln x$.
- 5p a) Să se arate că g este o primitivă a funcției f .
- 5p b) Să se calculeze $\int_1^e f(x) \cdot g(x) dx$.
- 5p c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$.

VARIANTA 27

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid |2x - 1| \leq 1\}$.
- 5p 2. Se consideră ecuația $x^2 + 3x - 5 = 0$ cu soluțiile x_1 și x_2 . Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 25} = 12$.
- 5p 4. Să se calculeze $C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3 + C_4^4$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(5,6)$ și $C(-1,1)$. Să se determine ecuația medianei duse din vârful C al triunghiului ABC .
- 5p 6. Să se calculeze aria triunghiului MNP dacă $MN = 6$, $NP = 4$ și $m(\angle MNP) = 30^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se calculeze A^2 , unde $A^2 = A \cdot A$.
- 5p b) Să se verifice că $AB - 2B = O_2$.
- 5p c) Să se arate că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $A \cdot X \cdot B = O_2$, atunci suma elementelor matricei X este egală cu zero.
2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_2[X]$, $f = X^2 + \hat{1}$ și $g = X + \hat{1}$ și mulțimea $H = \{a + bX + cX^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_2\}$.
- 5p a) Să se verifice că $g^2 = f$.
- 5p b) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f + g$ la polinomul f .
- 5p c) Să se determine numărul elementelor mulțimii H .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
- 5p c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1004} + 2009^x$.
- 5p a) Să se determine $\int f(x) dx$.
- 5p b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$.
- 5p c) Să se calculeze $\int_0^1 x \cdot f(x^2) dx$.

VARIANTA 28

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine cea mai mică valoare a funcției $f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$. Să se calculeze $f(1) + f(2) + \dots + f(6)$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x + 5) = \log_2(x^2 + 3x + 3)$.
- 5p 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând unul dintre numerele C_4^2, C_5^2 și C_4^3 , acesta să fie divizibil cu 3.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 3)$, $B(1, 5)$ și $C(4, 2)$. Să se calculeze distanța de la punctul A la mijlocul segmentului BC .
- 5p 6. Se calculeze $\sin 60^\circ - \cos 30^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $M = \{aI_2 + bV \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se verifice că $I_2 \in M$.
- 5p b) Să se arate că dacă $A \in M$ și A este matrice inversabilă, atunci $a \neq 0$.
- 5p c) Știind că $A, B \in M$, să se arate că $AB \in M$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = xy - 5(x + y) + 30$.
- 5p a) Să se demonstreze că $x * y = (x - 5)(y - 5) + 5$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Știind că legea de compoziție „*” este asociativă, să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x = x$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e} \cdot e^x - 1, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$.
- 5p a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 1$.
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Să se arate că funcția f este concavă pe $(1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$.
- 5p a) Să se determine $\int (x^2 + 1) \cdot f(x) dx$.
- 5p b) Să se verifice că $\int_0^1 f(x) dx = \ln(2e)$.
- 5p c) Să se arate că $\int_0^1 f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e(e - 1)$.

VARIANTA 29

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $C_5^2 - A_4^2 + 6$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$. Să se calculeze $f(-6) + f(0) + f(6) + f(12)$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 - 1) = 1$.
- 5p 4. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x^2 + 2x - 7 = y \end{cases}$, unde $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.
- 5p 5. Să se determine numerele reale m și n pentru care punctele $A(3, -1)$ și $B(1, 1)$ se află pe dreapta de ecuație $x + my + n = 0$.
- 5p 6. Să se calculeze $(\cos 150^\circ + \cos 30^\circ)(\sin 120^\circ - \sin 60^\circ)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ notăm cu A^t transpusa matricei A .
- 5p a) Să se calculeze $I_2 + (I_2)^t$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p b) Să se demonstreze că pentru orice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $m \in \mathbb{R}$ are loc relația $(mA)^t = mA^t$.
- 5p c) Să se determine matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A + A^t = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = (x - \sqrt{2})(y - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$.
- 5p a) Să se rezolve ecuația $x * x = x$, unde $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se demonstreze că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p c) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln x$.
- 5p a) Să se arate că $f(1) - f'(1) = 1$.
- 5p b) Să se determine punctul de extrem al funcției f .
- 5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{x}$.
2. Se consideră integralele $I = \int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx$ și $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{x+1} dx$.
- 5p a) Să se verifice că $I + J = e - 1$.
- 5p b) Utilizând, eventual, inegalitatea $e^x \geq x + 1$, adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$, să se arate că $J \geq \frac{1}{2}$.
- 5p c) Să se demonstreze că $I = \frac{e-2}{2} + \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2} dx$.

VARIANTA 30

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze suma $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^7$.
- 5p 2. Să se arate că $(x-1)(x-2) > x-3$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x+3} = x$.
- 5p 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element n din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, acesta să verifice inegalitatea $n^2 \leq 2^n$.
- 5p 5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care dreptele $d_1: -2x - my + 3 = 0$ și $d_2: mx + y - 5 = 0$ sunt paralele.
- 5p 6. Să se calculeze $\sin 30^\circ - \cos 45^\circ + \sin 60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a \\ x + by + b^2z = b \\ x + cy + c^2z = c \end{cases}$$
, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, sunt distincte două câte două.
- 5p a) Să se rezolve sistemul pentru $a = 0$, $b = 1$ și $c = 2$.
- 5p b) Să se verifice că $\det(A) = (a-b)(b-c)(c-a)$, unde A este matricea asociată sistemului.
- 5p c) Să se demonstreze că soluția sistemului nu depinde de numerele reale a, b și c .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + y + m$, unde m este număr real.
- 5p a) Să se arate că legea de compoziție "*" este asociativă.
- 5p b) Să se determine m astfel încât $e = -6$ să fie elementul neutru al legii "*".
- 5p c) Să se determine m astfel încât $(-\sqrt{3}) * (-\sqrt{2}) * m * \sqrt{3} = 3\sqrt{2}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x$.
- 5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- 5p b) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.
- 5p c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f'(x) - f''(x) + f(x) = e^x - 3$.
2. Pentru orice număr natural n se consideră $I_n = \int_0^1 x(1+x)^n dx$.
- 5p a) Să se calculeze I_1 .
- 5p b) Utilizând faptul că $(1+x)^n \leq (1+x)^{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in [0, 1]$, să se arate că $I_{2009} \geq I_{2008}$.
- 5p c) Folosind, eventual, identitatea $x(1+x)^n = (1+x)^{n+1} - (1+x)^n$, adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in \mathbb{R}$, să se arate că $I_n = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}$.

VARIANTA 31

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_1 = 1$ și $a_5 = 13$. Să se calculeze a_{2009} .
- 5p 2. Ecuația $x^2 + mx + 2 = 0$ are soluțiile x_1 și x_2 . Să se determine valorile reale ale lui m pentru care $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2-x} = 4$.
- 5p 4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (m^2 - 1)x + m + 1$. Să se arate că $f(1) \geq -\frac{1}{4}$, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, -1)$, $B(2, 3)$ și $C(3, 1)$. Să se determine coordonatele punctului D astfel încât patrulaterul $ABDC$ să fie paralelogram.
- 5p 6. Să se calculeze $\cos 80^\circ + \cos 100^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ A(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ și matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se calculeze determinantul matricei $A(1, 1)$.
- 5p b) Să se demonstreze că dacă $A, B \in \mathcal{M}$, atunci $A + B \in \mathcal{M}$.
- 5p c) Să se arate că $\det(I_2 - A(0, b)) \neq 0$, oricare ar fi $b \in \mathbb{R}$.
2. Se consideră inelul de polinoame $\mathbb{Z}_3[X]$.
- 5p a) Pentru $g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $g = (X + \hat{2})^2(X + \hat{1})$, să se calculeze $g(\hat{0})$.
- 5p b) Dacă $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X$, să se arate că $f(x) = \hat{0}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}_3$.
- 5p c) Să se determine toate polinoamele $h \in \mathbb{Z}_3[X]$, care au gradul egal cu 3 și pentru care $h(\hat{0}) = h(\hat{1}) = h(\hat{2}) = \hat{0}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x$.
- 5p a) Să se arate că $f'(x) = x(2 \ln x + 1)$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x \ln x}$.
- 5p c) Să se demonstreze că $f(x) \geq -\frac{1}{2e}$, pentru orice $x > 0$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.
- 5p a) Să se determine $\int_0^1 f(x) e^{-x} dx$.
- 5p b) Să se arate că $\int_0^1 f''(x) dx = 2e - 1$.
- 5p c) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx$.

VARIANTA 32

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_{10} - a_2 = 16$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$. Să se calculeze $f(2) + f(2^2) + \dots + f(2^7)$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1} = x - 1$.
- 5p 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element n al mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$, acesta să verifice inegalitatea $n! \geq n^2$.
- 5p 5. Să se calculeze distanța de la punctul $O(0,0)$ la punctul de intersecție a dreptelor $d_1: 2x - y - 2 = 0$ și $d_2: x + 3y - 8 = 0$.
- 5p 6. Să se verifice că în orice triunghi dreptunghic ABC , de ipotenuză BC , are loc relația $\sin^2 B + \sin^2 C = 1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră punctele $A_n(n, n^2)$, unde $n \in \mathbb{N}$.
- 5p a) Să se determine ecuația dreptei A_0A_1 .
- 5p b) Să se calculeze aria triunghiului $A_0A_1A_2$.
- 5p c) Să se arate că pentru orice $m, n, p \in \mathbb{N}$, distincte două câte două, aria triunghiului $A_mA_nA_p$ este un număr natural.
2. Se consideră polinomul $f = 4X^4 + 4mX^3 + (m^2 + 7)X^2 + 4mX + 4$, unde $m \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că $x = 1$ este rădăcină a polinomului f .
- 5p b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că suma rădăcinilor polinomului f este egală cu 0.
- 5p c) Pentru $m = -5$ să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = 0$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{1}{e^x}$.
- 5p a) Să se calculeze $f(0) + f'(0)$.
- 5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + f'(x)}{x}$.
- 5p c) Să se arate că funcția f este concavă pe $\mathbb{R}$.
2. Se consideră funcțiile $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$, $g(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{2008} - x^{2009}$.
- 5p a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției f .
- 5p b) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f .
- 5p c) Să se arate că $\int_0^1 (x+1)g(x) dx < 1$.

VARIANTA 33

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, în care $a_1 = 2$ și $a_2 = 4$. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.
- 5p 2. Să se determine funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (2m+1)x + 3$, $m \in \mathbb{R}$, al cărei grafic are abscisa vârfului egală cu $\frac{7}{2}$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x-1} = 3^{5-x}$.
- 5p 4. Să se calculeze $A_5^2 - P_3$.
- 5p 5. Să se determine numărul real m pentru care punctul $A(2,3)$ se află pe dreapta $d: 2x - y + m = 0$.
- 5p 6. Să se calculeze aria triunghiului MNP știind că $MN = 4$, $NP = 6$ și $m(\angle MNP) = 45^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$.

- 5p a) Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, să se calculeze AB .
- 5p b) Să se demonstreze că pentru oricare $X, Y \in \mathcal{M}$, rezultă că $XY \in \mathcal{M}$.
- 5p c) Să se demonstreze că, dacă $U \in \mathcal{M}$ și $VU = UV$, pentru orice $V \in \mathcal{M}$, atunci există $p \in \mathbb{Z}$ astfel încât $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f = (X^2 - 2X + 1)^2 - a^2$, unde $a \in \mathbb{R}$.

- 5p a) Știind că $a = 0$ să se determine soluțiile ecuației $f(x) = 0$.
- 5p b) Să se verifice că $f = (X^2 - 2X + 1 + a)(X^2 - 2X + 1 - a)$.
- 5p c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul f are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{2e^x}{x + e^x}$.

- 5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(x+e^x)^2}$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$.
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Să se arate că $-1 \leq f(x) \leq \frac{1-e}{1+e}$, oricare ar fi $x \geq 0$.

2. Pentru orice număr natural nenul n se consideră, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$.

- 5p a) Să se calculeze I_1 .
- 5p b) Să se arate că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p c) Utilizând, eventual, inegalitatea $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{x+1} \leq x^n$, adevărată pentru orice $x \in [0, 1]$ și $n \in \mathbb{N}^*$, să se demonstreze că $\frac{1}{2} \leq 2010 \cdot I_{2009} \leq 1$.

VARIANTA 34

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $(2x-1)^2 \leq 9$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$. Să se calculeze $f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(10)$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 + 4) = \log_2(x + 4)$.
- 5p 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând unul dintre numerele P_3 , A_3^1 și C_4^3 , acesta să fie divizibil cu 3.
- 5p 5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele $A(2, -3)$ și $B(-3, 2)$.
- 5p 6. Să se determine aria unui triunghi ABC în care $AB = 5$, $AC = 6$ și $m(\angle BAC) = 60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}^* \right\}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Se notează cu X^t transpusa matricei X .
- 5p a) Să se calculeze $A^t \cdot A$.
- 5p b) Să se arate că, pentru orice matrice $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}$, are loc egalitatea $\det(X \cdot X^t) = (ad - bc)^2$.
- 5p c) Să se arate că, pentru orice matrice $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ cu $\det(X \cdot X^t) = 0$, are loc relația $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale, se consideră legea de compoziție definită prin $x \circ y = xy - x - y + 2$.
- 5p a) Să se arate că legea " $\circ$ " este asociativă.
- 5p b) Să se arate că, pentru oricare $x, y \in (1, +\infty)$, rezultă că $x \circ y \in (1, +\infty)$.
- 5p c) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $x \circ a = a$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^x$.
- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se determine $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- 5p c) Să se demonstreze că funcția f' este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
2. Se consideră funcțiile $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x \ln x$ și $g(x) = 2x + \ln x + 1$.
- 5p a) Să se arate că f este o primitivă a funcției g .
- 5p b) Să se calculeze $\int_1^e f(x)g(x) dx$.
- 5p c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

VARIANTA 35

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $\log_5 10 + \log_5 3 - \log_5 6$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Să se calculeze $f(1) + f(2) + \dots + f(6)$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2-x} = 5^{5x-5}$.
- 5p 4. După două scumpiri succesive cu 10%, respectiv cu 20%, prețul unui produs este de 660 lei. Să se determine prețul inițial al produsului.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, -1)$ și $B(-2, 2)$. Să se determine distanța dintre punctele A și B .
- 5p 6. În triunghiul MNP se cunosc $MN = 3$, $MP = 5$ și $m(\angle M) = 60^\circ$. Să se calculeze lungimea laturii NP .

SUBIECTUL II (30p)

- 5p 1. Fie funcția $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definită prin $f(A) = A + A^t$, unde A^t este transpusa matricei A .
- 5p a) Să se calculeze $f(I_2)$.
- 5p b) Să se demonstreze că $(A+B)^t = A^t + B^t$, oricare ar fi $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 5p c) Să se determine matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $\det A = 1$ și $f(A) = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Se consideră ecuația $x^4 - ax^3 - ax + 1 = 0$ cu soluțiile x_1, x_2, x_3, x_4 , unde $a \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$.
- 5p b) Pentru $a = 1$, să se determine soluțiile reale ale ecuației.
- 5p c) Să se determine valorile întregi ale lui a pentru care ecuația admite cel puțin o soluție număr întreg.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x} - 3x$.
- 5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}-6}{2}$, pentru orice $x \in (0; +\infty)$.
- 5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
- 5p c) Să se demonstreze că $-4 \leq f(x) + f(x^2) \leq 0$, pentru orice $x \in (0; 1]$.
2. Se consideră funcțiile $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 3x^2 + 2$ și $F(x) = e^x + x^3 + 2x - 1$.
- 5p a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .
- 5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) \cdot F(x) dx$.
- 5p c) Să se demonstreze că $\int_0^1 (xf(x) + F(x)) dx = F(1)$.

VARIANTA 36

	SUBIECTUL I (30p)
5p	1. Să se determine numerele reale a și b pentru care $(a-3)^2 + (b+2)^2 = 0$.
5p	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - x$. Să se calculeze $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(5)$.
5p	3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(3x-1) = \log_3(2x+1)$.
5p	4. Să se demonstreze că parabola asociată funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 + 1$ este situată deasupra axei Ox , oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.
5p	5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(2,3)$ și $C(3,m)$. Să se determine numărul real m pentru care punctele A , B și C sunt coliniare.
5p	6. Raza cercului circumscris triunghiului ABC are lungimea de 3 și $AC = 6$. Să se calculeze $\sin B$.
	SUBIECTUL II (30p)
	1. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ și matricele $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5p	a) Să se verifice că $B^2 = 3B$, unde $B^2 = B \cdot B$.
5p	b) Să se arate că $mI_3 + nB \in G$, oricare ar fi $m, n \in \mathbb{Z}$.
5p	c) Să se arate că dacă $A \in G$ și $A^2 = O_3$, atunci $A = O_3$, unde $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A^2 = A \cdot A$.
	2. Se consideră polinomul $f = X^4 - 12X^2 + 35$, $f \in \mathbb{R}[X]$.
5p	a) Să se arate că $f = (X^2 - 6)^2 - 1$.
5p	b) Să se demonstreze că polinomul f nu are rădăcini întregi.
5p	c) Să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.
	SUBIECTUL III (30p)
	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 3x - 3)e^x$.
5p	a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f .
5p	c) Să se arate că tangenta la graficul funcției f , dusă în punctul de coordonate $(-2, f(-2))$, este paralelă cu axa Ox .
	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ e^x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$.
5p	a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
5p	b) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
5p	c) Să se demonstreze că $\int_0^1 xf(x^2) dx = \frac{e}{2}$.

VARIANTA 37

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $2^{x^2} = 16$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x$. Să se calculeze $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(10)$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - x - 2} = x - 2$.
- 5p 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $\{3, 4, 5, 6\}$, acesta să verifice inegalitatea $n(n-1) \geq 20$.
- 5p 5. Să se determine coordonatele simetricului punctului $A(2, -4)$ față de punctul $B(1, -2)$.
- 5p 6. Să se calculeze $\sin^2 80^\circ + \sin^2 10^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se determine numerele a, b și c astfel încât $A + F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- 5p b) Să se arate că pentru $a = c = 0$ și $b = -1$ matricea A este inversa matricei F .
- 5p c) Să se rezolve ecuația $F \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, unde $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.
2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x * y = 2xy - x - y + 1$.
- 5p a) Să se arate că $x * y = xy + (1-x)(1-y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.
- 5p c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x * (1-x) = 0$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x - \ln x}{x + \ln x}$.
- 5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
- 5p b) Să se arate că $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{(x + \ln x)^2}$, oricare ar fi $x \in [1, +\infty)$.
- 5p c) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f'(x)}{(f(x) + 1)^2}$.
2. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ și $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.
- 5p a) Să se verifice că $\int_0^1 f'(x) dx = \ln 2$.
- 5p b) Să se demonstreze că $\int g(x) dx = f(x) + C$.
- 5p c) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{g(x)}{f^2(x)} dx$.

VARIANTA 38

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ în care $b_1 = 2$ și $b_2 = 6$. Să se calculeze b_5 .
- 5p 2. Să se determine numerele reale m pentru care minimul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + 2$ este egal cu $-\frac{1}{4}$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x-5} = 3^{x^2-8}$.
- 5p 4. Să se rezolve ecuația $C_n^2 = 21$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- 5p 5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1,1)$ și are panta egală cu 1.
- 5p 6. În triunghiul ABC se cunosc $AB = AC = 6$ și $BC = 6\sqrt{3}$. Să se calculeze $\cos B$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + 3y + 2z = b \\ x - 2y + az = 5, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}. \\ x + y + 4z = 4 \end{cases}$$

- 5p a) Să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.
- 5p b) Pentru $a = -1$ și $b = 2$ să se rezolve sistemul.
- 5p c) Să se determine numărul real b , știind că (x_0, y_0, z_0) este soluție a sistemului și că $x_0 + y_0 + z_0 = 4$.
2. Se consideră polinoamele $f = X^2 - 12X + 35$ și $g = (X - 6)^{2009} + X - 6$. Polinomul g are forma algebrică $g = a_{2009}X^{2009} + a_{2008}X^{2008} + \dots + a_1X + a_0$, cu $a_0, a_1, \dots, a_{2009} \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Să se calculeze $f(5) + g(5)$.
- 5p b) Să se arate că numărul $a_0 + a_1 + \dots + a_{2009}$ este negativ.
- 5p c) Să se determine restul împărțirii polinomului g la polinomul f .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

- 5p a) Să se arate că $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
- 5p c) Știind că $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, să se determine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + g(x^2) + g(x^3) + \dots + g(x^{2009}) + x^{2010}}{x^{2009}}.$$

2. Se consideră $I_n = \int_e^{e^2} x \ln^n x \, dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

- 5p a) Să se calculeze I_0 .
- 5p b) Să se arate că $I_n \leq I_{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
- 5p c) Să se demonstreze că are loc relația $I_n = \frac{e^2(e^2 \cdot 2^n - 1)}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

VARIANTA 39

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $\log_2 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \sqrt[3]{8}$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - 2x$. Să se calculeze $f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(6)$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{169 - x^2} = 12$.
- 5p 4. Câte numere formate din 3 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4\}$?
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 4)$, $B(1, 1)$, $C(3, -1)$. Să se calculeze lungimea medianei duse din vârful A al triunghiului ABC .
- 5p 6. Să se calculeze aria unui triunghi dreptunghic care are un unghi de 60° și ipotenuza de lungime 8.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ și matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se arate că $I_2 \in \mathcal{M}$.
- 5p b) Știind că $A, B \in \mathcal{M}$, să se arate că $A + B \in \mathcal{M}$.
- 5p c) Să se demonstreze că $\det(AB - BA) \geq 0$, oricare ar fi $A, B \in \mathcal{M}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = -xy + 2x + 2y - 2$.
- 5p a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x * 4 = 10$.
- 5p b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * a = a * x = a$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Știind că legea „ $*$ ” este asociativă, să se calculeze $\frac{1}{2009} * \frac{2}{2009} * \dots * \frac{4018}{2009}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - x + 1$.
- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Să se determine punctul de extrem al funcției f .
- 5p c) Să se arate că $2 - e \leq f(2) \leq 0$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ -x + 1, & x < 1 \end{cases}$.
- 5p a) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.
- 5p b) Să se determine $a \in (0, 1)$ astfel încât $\int_{-a}^a f(x) dx = 1$.
- 5p c) Să se calculeze $\int_0^1 x f(e^x) dx$.

VARIANTA 40

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se formeze o ecuație de gradul al doilea, știind că aceasta are soluțiile $x_1 = 2$ și $x_2 = 3$.
- 5p 2. Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 - 2x + y = 0 \end{cases}$, unde $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(9 - x^2) = 1$.
- 5p 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element n al mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4\}$, acesta să verifice inegalitatea $n! < 5$.
- 5p 5. Să se calculeze $\frac{\sin 135^\circ}{\cos 45^\circ}$.
- 5p 6. Să se calculeze aria triunghiului ABC în care $AB = 8$, $AC = 4$ și $m(\angle BAC) = 45^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + 4y + 4z = 15 \\ 3x + (a + 4)y + 5z = 22 \\ 3x + 2y + (3 - a)z = 16 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Pentru $a = 1$ să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.
- 5p b) Să se arate că tripletul $(7, 1, 1)$ nu poate fi soluție a sistemului, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Să se determine soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $y_0 + z_0 = 3$.
2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziție $x \perp y = x + y + 1$, $x \circ y = ax + by - 1$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$ și funcția $f(x) = x + 2$. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$,
- 5p a) Să se demonstreze că $x \perp (-1) = (-1) \perp x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.
- 5p b) Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$ pentru care legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă.
- 5p c) Dacă $a = b = 1$ să se arate că funcția f este morfism între grupurile $(\mathbb{Z}, \perp)$ și $(\mathbb{Z}, \circ)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$.
- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1; 0)$.
- 5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x}$.
2. Se consideră funcțiile $f, F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ și $F(x) = x - \ln x$.
- 5p a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .
- 5p b) Să se calculeze $\int_1^2 F(x) \cdot f(x) dx$.
- 5p c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției F , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$.

VARIANTA 41

	SUBIECTUL I (30p)
5p	1. Să se determine soluțiile reale ale inecuației $x^2 - 9 \leq 0$.
5p	2. Să se arate că punctul $A\left(\frac{2010}{2009}, 2\right)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2009x - 2008$.
5p	3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.
5p	4. Să se determine numărul real x , știind că șirul $1, 2x+1, 9, 13, \dots$ este progresie aritmetică.
5p	5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,2)$ și $N(2,1)$. Să se determine ecuația dreptei MN .
5p	6. Să se calculeze $\operatorname{tg}^2 30^\circ + \operatorname{ctg}^2 45^\circ$.
	SUBIECTUL II (30p)
	1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - z = 3 \\ x - y + 2z = a \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.
5p	a) Să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.
5p	b) Pentru $a = 0$ să se rezolve sistemul.
5p	c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât soluția sistemului să verifice relația $x = y + z$.
	2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 2X^2 + aX - 8$.
5p	a) Să se determine numărul real a astfel încât o rădăcină a polinomului f să fie egală cu 2.
5p	b) Pentru $a = 4$ să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - 2X + 4$.
5p	c) Să se demonstreze că, dacă $a \in (2, +\infty)$, atunci f nu are toate rădăcinile reale.
	SUBIECTUL III (30p)
	1. Fie funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$.
5p	a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (1; +\infty)$
5p	b) Să se verifice că $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -1$.
5p	c) Să se arate că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(1, +\infty)$.
	2. Se consideră funcțiile $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{x}$ și $g(x) = \frac{1}{4} \cdot \ln x$.
5p	a) Să se arate că $\int_1^4 f(x) dx = \ln 4 + 2$.
5p	b) Să se verifice că $\int_1^4 g(x) dx = \ln 4 - \frac{3}{4}$.
5p	c) Să se calculeze $\int_1^e f(x^2) \cdot g(x^2) dx$.

VARIANTA 42

	SUBIECTUL I (30p)
5p	1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_1 = 6$ și $a_2 = 5$. Să se calculeze a_7 .
5p	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$. Să se rezolve inecuația $f(x) \leq 12$.
5p	3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.
5p	4. Câte numere formate din 4 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?
5p	5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, -1)$, $B(1, 1)$ și $C(0, -2)$. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic în A .
5p	6. Să se calculeze $\cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 160^\circ + \cos 170^\circ$.
	SUBIECTUL II (30p)
	1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5p	a) Să se verifice că $A^2 = 2I_2$, unde $A^2 = A \cdot A$.
5p	b) Să se determine x real astfel încât $\det(A - xI_2) = 0$.
5p	c) Să se demonstreze că $A^4 \cdot X = X \cdot A^4$, pentru orice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, unde $A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A$.
	2. Se consideră mulțimea $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1\}$.
5p	a) Să se verifice că $3 + 2\sqrt{2} \in G$.
5p	b) Să se demonstreze că $x \cdot y \in G$, pentru oricare $x, y \in G$.
5p	c) Să se arate că orice element din mulțimea G are invers în G în raport cu înmulțirea numerelor reale.
	SUBIECTUL III (30p)
	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2010} + 2010^x$.
5p	a) Să se determine $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	b) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.
5p	c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x}$.
	2. Se consideră funcțiile $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x^2 + 1)}$ și $g(x) = \frac{1}{x}$.
5p	a) Să se verifice că $\int_1^e g(x) dx = 1$.
5p	b) Folosind identitatea $f(x) = g(x) - \frac{x}{x^2 + 1}$, adevărată pentru orice $x > 0$, să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.
5p	c) Utilizând inegalitatea $f(x) \leq \frac{1}{2x^2}$, adevărată pentru orice $x \in [1, e]$, să se arate că $\ln \frac{e^2 + 1}{2} \geq \frac{e + 1}{e}$.

VARIANTA 43

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine soluțiile reale ale sistemului $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$. Să se calculeze $f(2) + f(2^2) + \dots + f(2^5)$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x^2+3x-2} = 8$.
- 5p 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element n al mulțimii $\{2, 3, 4, 5\}$, acesta să verifice inegalitatea $n^2 + n > n!$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, -1)$ și $B(-2, a)$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine numărul real a astfel încât dreapta AB să conțină punctul $O(0, 0)$.
- 5p 6. Să se calculeze $\cos x$, știind că $\sin x = \frac{3}{5}$ și măsura unui unghi ascuțit.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ și matricea $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se arate că $O_3 \in \mathcal{M}$.
- 5p b) Să se demonstreze că produsul a două matrice din $\mathcal{M}$ este o matrice din $\mathcal{M}$.
- 5p c) Știind că $A \in \mathcal{M}$ și $\det(A) = 0$, să se demonstreze că $A^3 = O_3$, unde $A^3 = A \cdot A \cdot A$.
2. Se consideră polinomul $f = X^4 - X^3 + aX^2 + bX + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Pentru $a = c = 1$ și $b = -1$ să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X^2 + 1$.
- 5p b) Să se determine numerele a, b, c știind că restul împărțirii polinomului f la $X^2 + 1$ este X , iar restul împărțirii polinomului f la $X - 1$ este -1 .
- 5p c) Să se demonstreze că dacă $a \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, atunci f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.
- 5p a) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .
- 5p b) Să se arate că $f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Să se demonstreze că oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ avem $\frac{2}{3} \leq f(x^4) + f(x^2) \leq 2$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{1}{x}$.
- 5p a) Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.
- 5p b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.
- 5p c) Să se demonstreze că volumele corpurilor obținute prin rotația în jurul axei Ox , a graficelor funcțiilor $g, h: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ și $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ sunt egale.

VARIANTA 44

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_2 = 5$ și $r = 3$. Să se calculeze a_8 .
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$. Să se calculeze suma $f(3) + f(3^2) + \dots + f(3^5)$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x+1) = 1$.
- 5p 4. Să se calculeze numărul submulțimilor cu 2 elemente ale unei mulțimi care are 6 elemente.
- 5p 5. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului AB , știind că $A(5, -4)$ și $B(-3, 6)$.
- 5p 6. Să se calculeze $\sin^2 150^\circ + \cos^2 30^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează cu A^t transpusa matricei A .
- 5p a) Știind că $ad = 4$ și $bc = 3$, să se calculeze $\det(A)$
- 5p b) Să se calculeze $A \cdot A^t$.
- 5p c) Să se demonstreze că dacă suma elementelor matricei $A \cdot A^t$ este egală cu 0, atunci $\det(A) = 0$.
2. Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 .
- 5p a) Să se calculeze suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.
- 5p b) Să se determine rădăcinile polinomului f știind că $a = -1$, $b = -2$ și $c = 0$.
- 5p c) Știind că rădăcinile polinomului f sunt în progresie aritmetică, să se demonstreze că $b = a - 1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x$.
- 5p a) Să se verifice că $f'(0) = 1$.
- 5p b) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.
- 5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{e^x}$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.
- 5p a) Să se verifice că $\int_0^1 f(x) dx = e - \frac{3}{2}$.
- 5p b) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x) dx$.
- 5p c) Să se arate că dacă $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f , atunci $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx = F(2) - F(1)$.

VARIANTA 45

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x - 5$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 4$. Să se calculeze $f(1) + f(2) + \dots + f(10)$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(10 - x) = 2$.
- 5p 4. Să se rezolve ecuația $A_n^2 = 12, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2), B(5,2)$ și $C(3,-1)$. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC .
- 5p 6. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $A = \{\sin 30^\circ, \sin 45^\circ, \sin 60^\circ\}$, acesta să fie număr rațional.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează $A^2 = A \cdot A$.
- 5p a) Să se calculeze A^2 .
- 5p b) Să se verifice că $A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I_2$.
- 5p c) Știind că $a+d \neq 0$ și $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $A^2M = MA^2$, să se demonstreze că $AM = MA$.
2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X], f = X^3 - 2X^2 + aX + b$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 .
- 5p a) Pentru $a=1$ și $b=0$ să se determine x_1, x_2, x_3 .
- 5p b) Știind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$, să se arate că $a=1$.
- 5p c) Știind că $f = (X - x_1^2)(X - x_2^2)(X - x_3^2)$, să se determine numerele reale a și b .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x-1)e^x$ și $g(x) = xe^x$.
- 5p a) Să se verifice că $f'(x) = g(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției g .
- 5p c) Dacă $I \subset \mathbb{R}$ este un interval, să se demonstreze că funcția g este crescătoare pe I dacă și numai dacă funcția f este convexă pe I .
2. Se consideră funcțiile $f, g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$ și $g(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.
- 5p a) Să se arate că funcția f este o primitivă a funcției g .
- 5p b) Să se calculeze $\int_1^e f(x)g(x)dx$.
- 5p c) Să se determine numărul real $a \in (1; +\infty)$ astfel încât $\int_1^a f(x)dx = 2$.

VARIANTA 46

SUBIECTUL I (30p)	
5p	1. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ în care $b_1 = 1$ și $b_2 = 3$. Să se calculeze b_4 .
5p	2. Ecuația $x^2 - x + m = 0$ are soluțiile x_1 și x_2 . Să se determine numărul real m pentru care $\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} = -\frac{3}{4}$.
5p	3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x - 2} = 0$.
5p	4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element n al mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$, acesta să verifice inegalitatea $3^n > n^3$.
5p	5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5, -1)$ și $B(3, 1)$. Să se determine coordonatele simetricului punctului A față de punctul B .
5p	6. Să se calculeze aria triunghiului MNP , știind că $MN = 10$, $NP = 4$ și $m(\angle MNP) = 60^\circ$.
SUBIECTUL II (30p)	
1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{M(x, y) \mid M(x, y) = xI_2 + yA, x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.	
5p	a) Să se verifice că $A^2 = O_2$, unde $A^2 = A \cdot A$.
5p	b) Să se determine inversa matricei $M(1, 1)$.
5p	c) Să se determine matricele inversabile din mulțimea G .
2. În mulțimea $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + pX^2 + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 și $p \in \mathbb{R}$.	
5p	a) Să se calculeze $f(-p)$.
5p	b) Să se determine $p \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $X - 1$.
5p	c) Să se calculeze în funcție de $p \in \mathbb{R}$ suma $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.
SUBIECTUL III (30p)	
1. Se consideră funcția $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \in (0; 1) \\ 1 + \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$.	
5p	a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 1$.
5p	b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
5p	c) Să se arate că $f(x) \geq \frac{3}{4}$, pentru orice $x > 0$.
2. Se consideră funcțiile $f, g: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ și $g(x) = x \ln x$.	
5p	a) Să se verifice că $\int_1^2 f(x) dx = 2 \ln 2 + \frac{7}{3}$.
5p	b) Să se arate că $\int_1^2 g(x) dx = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$.
5p	c) Să se arate că există $x_0 \in (1; 2)$ astfel încât $f(x_0) > g(x_0) + 3$.

VARIANTA 47

	SUBIECTUL I (30p)
5p	1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_1 = 7$ și $a_7 = 37$. Să se calculeze suma primilor zece termeni ai progresiei.
5p	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 7 - x$. Să se calculeze $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(7)$.
5p	3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{\sqrt{x-1}} = 4$.
5p	4. Să se calculeze $C_7^5 - C_6^5 - C_6^4$.
5p	5. Să se determine numărul real pozitiv a astfel încât distanța dintre punctele $A(2, -1)$ și $B(-1, a)$ să fie egală cu 5.
5p	6. Să se calculeze aria unui triunghi echilateral care are lungimea înălțimii egală cu $3\sqrt{3}$.
	SUBIECTUL II (30p)
	1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
5p	a) Să se determine matricea A^2 , unde $A^2 = A \cdot A$.
5p	b) Să se demonstreze că $A^3 = 4A^2 - 5A + 2I_3$, unde $A^3 = A^2 \cdot A$.
5p	c) Să se determine numerele reale m, n, p astfel încât $A^{-1} = mA^2 + nA + pI_3$, unde A^{-1} este inversa matricei A .
	2. Se consideră numerele reale x_1, x_2, x_3 cu proprietatea că:
	$x_1 + x_2 + x_3 = 2; \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{2}; x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -2.$
5p	a) Să se calculeze $x_1x_2x_3$.
5p	b) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$, știind că ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ are soluțiile x_1, x_2, x_3 .
5p	c) Să se descompună polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 2X + 4$ în factori ireductibili peste $\mathbb{R}[X]$.
	SUBIECTUL III (30p)
	1. Se consideră funcția $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2 \ln x$.
5p	a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [1; +\infty)$.
5p	b) Să se demonstreze că $\ln \frac{2010}{2009} \leq \frac{1}{2}$.
5p	c) Folosind faptul că $1 \leq x \leq x^2 \leq 2$, oricare ar fi $x \in [1, \sqrt{2}]$, să se demonstreze inegalitatea $x^2 - x \leq 2 \ln x$, pentru orice $x \in [1, \sqrt{2}]$.
	2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră $I_n = \int_2^3 \frac{x^n}{x^2 - 1} dx$.
5p	a) Să se arate că $I_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.
5p	b) Să se calculeze I_1 .
5p	c) Să se demonstreze că $I_{n+2} - I_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

VARIANTA 48

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_1 = 3$ și $a_3 = 7$. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.
- 5p 2. Să se determine numerele reale m pentru care punctul $A(m, -1)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x + 3) = 2$.
- 5p 4. Să se calculeze numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi care are 5 elemente.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, -2)$, $B(1, 2)$ și $C(2, -1)$. Să se calculeze distanța de la punctul C la mijlocul segmentului AB .
- 5p 6. Triunghiul ABC are $AB = 8$, $AC = 8$ și $m(\angle BAC) = 30^\circ$. Să se calculeze aria triunghiului ABC .

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Se notează $X^n = \underbrace{X \cdot X \cdot \dots \cdot X}_{\text{de } n \text{ ori}}$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

- 5p a) Să se calculeze X^2 .
- 5p b) Să se determine inversa matricei X .
- 5p c) Să se determine numărul real r astfel încât $X^3 = 3X^2 + rX + I_3$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2^{x+y}$.
- 5p a) Să se calculeze $2009 \circ (-2009)$.
- 5p b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x \circ x^2 = 64$.
- 5p c) Să se demonstreze că, dacă $(x \circ y) \circ z = 2^{z+1}$, atunci $x = -y$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

- 5p a) Să se arate că $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.
- 5p b) Să se demonstreze că $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \geq f(x)$, oricare ar fi $x \in (1; +\infty)$.
- 5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) \right)$.

2. Se consideră $I_n = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^n(x^2+1)} dx$, unde $n \in \mathbb{N}$.

- 5p a) Să se verifice că $I_0 + I_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.
- 5p b) Utilizând identitatea $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$ adevărată pentru orice $x \neq 0$, să se determine I_1 .
- 5p c) Să se arate că $I_n + I_{n-2} < \frac{1}{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

VARIANTA 49

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze suma $1+11+21+31+\dots+111$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 4$. Să se determine valorile numărului real m pentru care punctul $A(m, 4)$ aparține graficului funcției f .
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2+x+1} = 8$.
- 5p 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element n al mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$, acesta să verifice inegalitatea $2^n < n!$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(m^2, m)$ și dreapta de ecuație $d: x + y + m = 0$. Să se determine valorile reale ale lui m pentru care punctul A aparține dreptei d .
- 5p 6. Să se calculeze aria triunghiului MNP , știind că $MN = NP = 6$ și $m(\angle MNP) = 120^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Să se calculeze $\det(M_1 + M_2)$.
- 5p b) Să se calculeze M_a^2 , unde $M_a^2 = M_a \cdot M_a$.
- 5p c) Să se determine matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $M_a X = X M_a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.
- 5p a) Să se calculeze $x * 0$.
- 5p b) Să se demonstreze că legea „ $*$ ” este asociativă.
- 5p c) Știind că $x_0 \in \mathbb{Q}$ și $x_n = x_0 * x_{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, să se arate că $x_3 \notin \mathbb{Q}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)\ln x$.
- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- 5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- 5p c) Să se arate că funcția f' este crescătoare pe $(0, +\infty)$.
2. Se consideră funcțiile $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$ și $g(x) = \frac{\sqrt{x} + 2}{2x}$.
- 5p a) Să se arate că funcția f este o primitivă a funcției g .
- 5p b) Să se calculeze $\int_1^4 f(x) \cdot g(x) dx$.
- 5p c) Să se demonstreze că $\int_1^4 g(x) \cdot f''(x) dx = -1$.

VARIANTA 50

	SUBIECTUL I (30p)
5p	1. Să se determine elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x + 2 \geq 4x - 1\}$.
5p	2. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$ cu axele de coordonate.
5p	3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 4} = 2$.
5p	4. Suma de 500 de lei a fost depusă la o bancă cu o rată a dobânzii de 8 %. Să se calculeze dobânda obținută după un an.
5p	5. Să se determine coordonatele vectorului $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, știind că $A(2, 3)$ și $B(-1, 5)$.
5p	6. Să se calculeze aria unui triunghi echilateral care are perimetrul egal cu 6.
	SUBIECTUL II (30p)
	1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ și matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5p	a) Să se arate că $I_2 \in \mathcal{M}$.
5p	b) Știind că $A, B \in \mathcal{M}$, să se arate că $A + B \in \mathcal{M}$.
5p	c) Să se demonstreze că $\det(AB - BA) \leq 0$, oricare ar fi $A, B \in \mathcal{M}$.
	2. Se consideră mulțimea $M = \{f \in \mathbb{Z}_3[X] \mid f = X^2 + aX + b\}$.
5p	a) Să se calculeze $f(\hat{1})$ pentru $a = b = \hat{1}$.
5p	b) Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_3$ pentru care $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = \hat{1}$.
5p	c) Să se determine numărul elementelor mulțimii M .
	SUBIECTUL III (30p)
	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$.
5p	a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.
5p	b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .
5p	c) Să se demonstreze că funcția f este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$.
	2. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$ și $g(x) = x$.
5p	a) Să se determine $\int f(\sqrt{x}) dx$.
5p	b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$.
5p	c) Să se verifice că $\int_0^1 f(x^{50}) \cdot g^{99}(x) dx = \frac{e-1}{100}$.