

VARIANTA 51

	SUBIECTUL I (30p)
5p	1. Să se determine numărul real x știind că numerele $x + 1$, $2x - 3$ și $x - 3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
5p	2. După o reducere a prețului cu 10%, un produs costă 99 lei. Să se determine prețul produsului înainte de reducere.
5p	3. Să se calculeze $C_{2009}^2 - C_{2009}^{2007}$.
5p	4. Să se determine funcția de gradul al II-lea al cărei grafic conține punctele $A(1;3)$, $B(0;5)$ și $C(-1;11)$.
5p	5. În triunghiul ABC punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor AB, BC , respectiv AC . Să se arate că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AN}$.
5p	6. În triunghiul ABC se dau $AB = BC = 3$ și $AC = 3\sqrt{2}$. Să se determine $\cos A$.
	SUBIECTUL II (30p)
	1. Se consideră matricele $H(a) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, unde $a > 0$.
5p	a) Să se calculeze $\det(H(a))$, $\forall a > 0$.
5p	b) Să se arate că $H(a) \cdot H(b) = H(a \cdot b)$, $\forall a, b > 0$.
5p	c) Să se calculeze determinantul matricei $H(1) + H(2) + H(3) + \dots + H(2008)$.
	2. Pe mulțimea $G = (2, \infty)$ se consideră operația $x \circ y = xy - 2(x + y) + 6$.
5p	a) Să se arate că $x \circ y = (x - 2)(y - 2) + 2$, $\forall x, y \in G$.
5p	b) Să se demonstreze că $x \circ y \in G$, pentru $\forall x, y \in G$.
5p	c) Să se arate că toate elementele mulțimii G sunt simetrizabile, în raport cu legea " $\circ$ ".
	SUBIECTUL III (30p)
	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$.
5p	a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 1$.
5p	b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
5p	c) Să se determine $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x) + f(e^{x^2}) + \dots + f(e^{x^{2009}})}{x^{2009}}$.
	2. Se consideră funcțiile $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x^2 + 2x$ și $F(x) = e^x + \frac{x^3}{3} + x^2 + 1$.
5p	a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .
5p	b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
5p	c) Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{f(x) - x^2 - 2x}{e^x + 1}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

VARIANTA 52

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $\log_2 3 - \log_2 \frac{3}{2}$.
- 5p 2. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a dreptelor de ecuații $2x + y - 4 = 0$ și $x + y - 3 = 0$.
- 5p 3. Să se determine valorile reale ale numărului m pentru care $x = 5$ este soluție a ecuației $m^2(x - 1) = x - 3m + 2$.
- 5p 4. Să se rezolve ecuația $\sqrt{4x^2 + 6x + 3} = x + 2$.
- 5p 5. Să se determine perimetrul triunghiului ABC ale cărui vârfuri sunt $A(-1;3)$, $B(-2;0)$ și $C(0;3)$.
- 5p 6. Să se calculeze lungimea laturii AC a triunghiului ABC , știind că $BC = \sqrt{2}$, $m(\angle BAC) = 30^\circ$ și $m(\angle ABC) = 45^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Se notează $A^n = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{\text{de } n \text{ ori}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p a) Să se demonstreze că $A^2 = 3A$.
- 5p b) Să se calculeze $\det(A^{10})$.
- 5p c) Să se determine inversa matricei $B = A + I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Pe mulțimea $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ se consideră operația $x \circ y = x^{3 \ln y}$.
- 5p a) Să se determine mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $x \circ e = 8$, unde e este baza logaritmului natural.
- 5p b) Să se demonstreze că $x \circ y \in G$, pentru $\forall x, y \in G$.
- 5p c) Să se arate că operația „ $\circ$ ” este asociativă pe mulțimea G .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax - 6, & x < 4 \\ \sqrt{x}, & x \geq 4 \end{cases}$, unde a este parametru real.
- 5p a) Să se determine valoarea reală a lui a astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0 = 4$.
- 5p b) Să se calculeze $f'(9)$.
- 5p c) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(9,3)$.
2. Pentru oricare $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$ și $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.
- 5p a) Să se determine $f_1(x)$, unde $x \in [0, \infty)$.
- 5p b) Să se demonstreze că $\int_0^1 f_1(x) \cdot \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4}$.
- 5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f_2(x)$, $x \in [0,1]$.

VARIANTA 53

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se verifice că $\lg \frac{1}{2} + \lg \frac{2}{3} + \dots + \lg \frac{9}{10} = -1$.
- 5p 2. Să se calculeze $C_{1000}^2 - C_{1000}^{998}$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 3^{-x} = \frac{10}{3}$.
- 5p 4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2 - (m-3)x + m-3 > 0$, pentru orice x real.
- 5p 5. Să se calculeze cosinusul unghiului A , al triunghiului ABC , știind că $AB = 3$, $AC = 5$ și $BC = 6$.
- 5p 6. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0;a)$, $B(-1;2)$ și $C(4;5)$, unde a este un număr real. Să se determine valorile lui a pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în A .

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n, n+2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- 5p a) Să se determine ecuația dreptei A_0A_1 .
- 5p b) Să se demonstreze că punctele A_0, A_1, A_2 sunt coliniare.
- 5p c) Să se arate că aria triunghiului OA_nA_{n+1} nu depinde de numărul natural n .
2. În inelul $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f = x^3 - x - 5$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 .
- 5p a) Să se calculeze $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.
- 5p b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care restul împărțirii polinomului f la $X - a$ este -5 .
- 5p c) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

SUBIECTUL III (30p)

- 5p 1. a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 4x + 1}$.
- 5p b) Să se determine intervalele de convexitate și intervalele de concavitate ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 6x^2 + 18x + 12$.
- 5p c) Se consideră funcția $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x^2 - 1) \ln x$. Să se demonstreze că $g(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ \frac{1}{x+1} - \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$
- 5p a) Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
- 5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -xf(x^2)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$.

VARIANTA 54

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $\log_3 5 + \log_3 6 - \log_3 10$.
- 5p 2. Să se determine valoarea maximă a funcției $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$.
- 5p 3. Să se determine valorile reale ale parametrului m știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 + (m-1)x + 3 = 0$ verifică egalitatea $x_1 = 3x_2$.
- 5p 4. Să se calculeze $C_{n+1}^n - C_{n+1}^1$, $n \in \mathbb{N}$.
- 5p 5. Să se calculeze $\sin 10^\circ - \cos 80^\circ$.
- 5p 6. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 2)$ și $B(4, 4)$. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului AB .

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -3 \\ 2x + y + z = 4 \\ mx - y + 4z = 1 \end{cases}$$
, unde m este un parametru real.
- 5p a) Să se arate că pentru orice m număr real tripletul $(0; 3; 1)$ este soluție a sistemului.
- 5p b) Să se determine valorile parametrului real m pentru care sistemul admite soluție unică.
- 5p c) Pentru $m \neq 3$ să se rezolve sistemul.
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$.
- 5p a) Să se arate că $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x * 5^x = 11$.
- 5p c) Să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea $*$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ și $g(x) = \frac{x-1}{e^x}$.
- 5p a) Să se verifice că $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 0$.
- 5p b) Să se determine coordonatele punctului de extrem al funcției f .
- 5p c) Să se demonstreze că $g(x) - f(x) \leq 1 + \frac{1}{e^2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
2. Se consideră funcțiile $f, g: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$ și $g(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1}$.
- 5p a) Să se verifice că $\int_0^1 f(x) dx = \ln 2$.
- 5p b) Să se calculeze $\int_0^1 g(x) dx$.
- 5p c) Să se arate că există $x_0 \in (0; 1)$ astfel încât $f(x_0) < g(x_0) - 2x_0$.

VARIANTA 55

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se compare numerele 2^2 și $\log_2 32$.
- 5p 2. Să se determine $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încât graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - x + 1$ să conțină punctul $A(2, 3)$.
- 5p 3. Să se determine numerele reale x pentru care este verificată egalitatea $\sqrt{x^2 + 1} = 2$.
- 5p 4. Să se rezolve ecuația $C_n^2 = C_n^1 + 2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- 5p 5. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC , știind că $BC = 10$ și $m(\angle BAC) = 60^\circ$.
- 5p 6. Să se calculeze numărul $\sin 60^\circ \cdot \cos 150^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea matricelor pătratice $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.
- Se notează $A^n = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{\text{de } n \text{ ori}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p a) Să se arate că $A + A^2 = 2A$.
- 5p b) Să se determine matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, astfel încât $\det(X + A) = 2$.
- 5p c) Știind că $A^n = A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, să se demonstreze că $A + 2A^2 + \dots + nA^n = \frac{n(n+1)}{2}A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + mX + 1$, $f \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 .
- Se notează $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p a) Să se determine numărul real m astfel încât $x_1 = 2$.
- 5p b) Să se arate că $S_3 + S_2 + mS_1 + 3 = 0$.
- 5p c) Să se arate că pentru orice număr par $m \in \mathbb{Z}$ polinomul f nu are rădăcini raționale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3^x + 1, & x \leq 1 \\ ax + 2, & x > 1 \end{cases}$.
- 5p a) Să se determine valoarea parametrului real a astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0 = 1$.
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((f(x) - 1) \cdot x)$.
2. Se consideră funcția $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.
- 5p a) Să se determine funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât funcția F să fie o primitivă pentru funcția f .
- 5p b) Să se demonstreze că funcția F este descrescătoare pe $[0, +\infty)$.
- 5p c) Să se demonstreze că $\frac{1}{6} \leq \int_0^1 F(x) dx \leq \frac{1}{2}$.

VARIANTA 56

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se arate că numărul $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{\log_2 8}$ este natural.
- 5p 2. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a dreptelor de ecuații $4x - 6y - 2 = 0$ și $2x + 3y - 7 = 0$.
- 5p 3. Să se determine valorile reale ale lui m știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 - (m^2 + 3)x + 3 = 0$ verifică egalitatea $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 7$.
- 5p 4. Să se rezolve ecuația $\frac{(n+2)!}{n!} = 56$, $n \in \mathbb{N}$.
- 5p 5. Să se arate că într-un triunghi ABC dreptunghic în A are loc relația $\cos^2 B + \cos^2 C = 1$.
- 5p 6. Să se calculeze aria triunghiului ABC , știind că $AB = AC = 4$ și $m(\angle A) = 60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se calculeze $\det(A)$.
- 5p b) Să se demonstreze că $A^3 = 7A$, unde $A^3 = A \cdot A \cdot A$.
- 5p c) Să se demonstreze că $A \cdot B = A$, unde $B = A^2 - 6I_2$ și $A^2 = A \cdot A$.
2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ și $g = X^3 + X^2 + X + 1$.
- 5p a) Să se demonstreze că $f = X \cdot g + 1$.
- 5p b) Să se determine rădăcinile reale ale polinomului g .
- 5p c) Să se calculeze $f(a)$, știind că a este o rădăcină a polinomului g .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$.
- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f''(x)}$.
- 5p c) Să se arate că $e^{\sqrt{2009}} + \sqrt{2010} \leq e^{\sqrt{2010}} + \sqrt{2009}$.
2. Se consideră funcțiile $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$ și $g(x) = f''(x)$.
- 5p a) Să se calculeze $\int_0^2 (x+1)f(x) dx$.
- 5p b) Să se calculeze $\int_0^1 g(x) dx$.
- 5p c) Să se determine primitiva funcției g a cărei asimptotă spre $+\infty$ este dreapta de ecuație $y = 2x$.

VARIANTA 57

SUBIECTUL I (30p)	
5p	1. Să se determine suma primilor 6 termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, în care $a_1 = 2$ și $a_2 = 5$.
5p	2. Să se determine valorile reale ale parametrului m astfel încât ecuația $x^2 + mx + 9 = 0$ să admită două soluții reale egale.
5p	3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 + 3x - 10) = 3$.
5p	4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $A = \{7, 11, 15, 19, \dots, 35\}$, acesta să fie divizibil cu 5.
5p	5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele $A(4; 0)$ și $B(0; 2)$.
5p	6. Să se calculeze $\cos B$, știind că lungimile laturilor triunghiului ABC sunt $AB = 6$, $AC = 8$ și $BC = 10$.
SUBIECTUL II (30p)	
1. În $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} 1+5x & -2x \\ 10x & 1-4x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.	
5p	a) Să se calculeze $A(1) \cdot A(-1)$.
5p	b) Să se arate că $(A(x))^2 = A((x+1)^2 - 1)$, pentru orice x real, unde $(A(x))^2 = (A(x)) \cdot (A(x))$.
5p	c) Să se determine inversa matricei $A(1)$.
2. Fie mulțimea $G = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1\}$.	
5p	a) Să se verifice dacă 0 și 1 aparțin mulțimii G .
5p	b) Să se demonstreze că pentru orice $x, y \in G$ avem $x \cdot y \in G$.
5p	c) Să se arate că dacă $x \in G$, atunci $\frac{1}{x} \in G$.
SUBIECTUL III (30p)	
1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - ex - 1$.	
5p	a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	b) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.
5p	c) Să se determine coordonatele punctului de intersecție dintre tangenta la graficul funcției f în punctul $O(0, 0)$ și dreapta de ecuație $x = 1$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x + \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$.	
5p	a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
5p	b) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
5p	c) Să se demonstreze că dacă $\int_a^b f(x) dx = \int_b^c f(x) dx$, unde a, b, c sunt numere reale și funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f , atunci numerele $F(a)$, $F(b)$, $F(c)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

VARIANTA 58

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $\log_5 25 - \log_3 9$.
- 5p 2. Să se determine funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ al cărei grafic conține punctele $A(2; 7)$ și $B(-1; -2)$.
- 5p 3. Să se arate că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 - x - 1 = 0$ verifică relația $x_1^2 + x_2^2 = x_1 + x_2 + 2$.
- 5p 4. Să se determine valorile naturale ale lui n pentru care expresia $E(n) = \sqrt{10 - 3n}$ este bine definită.
- 5p 5. Să se determine lungimea medianei duse din vârful A al triunghiului ABC , știind că vârfurile acestuia sunt $A(0; 4)$, $B(-2; 0)$ și $C(8; 0)$.
- 5p 6. Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC , știind că $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle B) = 30^\circ$ și $AB = 4\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații
$$\begin{cases} 2x - 5y + 4z = 0 \\ -3x + y + z = -1, \text{ cu } a \in \mathbb{Z}. \text{ Se notează cu } A \text{ matricea sistemului.} \\ 2x - z = a \end{cases}$$
- 5p a) Să se calculeze determinantul matricei A .
- 5p b) Pentru $a = 1$ să se rezolve sistemul.
- 5p c) Să se determine cea mai mică valoare a numărului natural a pentru care soluția sistemului este formată din trei numere naturale.
2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție asociativă $x \circ y = x + y + 1$.
- 5p a) Să se calculeze $2008 \circ 2009$.
- 5p b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $x \circ x^2 \leq 3$.
- 5p c) Fie mulțimea $A = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid n \geq 2 \text{ și } C_n^0 \circ C_n^1 \circ C_n^2 = n + 6 \right\}$. Să se determine numărul elementelor mulțimii A .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln x$.
- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
- 5p c) Să se demonstreze că $\sqrt{x} \geq 1 + \ln \sqrt{x}$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.
- 5p 2. a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (t^2 + t + 1) dt}{x^3 + 1}$.
- 5p b) Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Să se determine primitiva $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f , care verifică relația $F(1) = 0$.
- 5p c) Să se determine numărul real pozitiv a știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2$ este egal cu 5π .

VARIANTA 59

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine valorile reale ale numărului x știind că numerele $5-x$; $x+7$ și $3x+11$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p 2. Să se calculeze TVA-ul pentru un produs, știind că prețul de vânzare al produsului este de 238 lei (procentul TVA-ului este de 19 %).
- 5p 3. Să se arate că $\log_2 4 + \log_3 9 < \sqrt{36}$.
- 5p 4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 4$. Să se determine valorile lui x pentru care $f(x) + f(1) \leq 1$.
- 5p 5. Să se determine lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic, știind că suma acestora este 23, iar aria triunghiului este 60.
- 5p 6. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, -2)$ și are panta egală cu 2.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 5p a) Să se calculeze determinantul matricei A .
- 5p b) Să se calculeze A^2 știind că $A^2 = A \cdot A$.
- 5p c) Să se calculeze inversa matricei $I_3 + A$.
2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - pX^2 + qX - r$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Să se calculeze $f(0) - f(1)$.
- 5p b) Să se calculeze expresia $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$ în funcție de p, q, r .
- 5p c) Să se arate că polinomul $g = X^3 + X^2 + X - 1$ nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- 5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1}$.
- 5p c) Să se determine asimptota orizontală către $+\infty$ la graficul funcției f .

2. Pentru orice număr natural nenul n se consideră $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n e^x$ și $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

- 5p a) Să se verifice că $\int_0^1 e^{-x} f_1(x) dx = \frac{1}{2}$.
- 5p b) Să se calculeze I_1 .
- 5p c) Să se demonstreze că $I_n + nI_{n-1} = e$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

VARIANTA 60

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2+x} = 9$.
- 5p 2. Să se determine domeniul maxim de definiție D al funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lg(2x-3)$.
- 5p 3. Să se determine valorile reale ale numărului m știind că valoarea minimă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2mx + 3m$ este egală cu 2.
- 5p 4. Să se calculeze $C_{2009}^2 - C_{2008}^2 - C_{2008}^1$.
- 5p 5. Să se calculeze lungimea laturii AC a triunghiului ABC știind că $AB = 10$, $BC = 15$ și $m(\angle B) = 60^\circ$.
- 5p 6. Să se determine coordonatele punctului M care aparține dreptei AB și este egal depărtat de punctele $A(1; -1)$ și $B(5; -3)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $C(A) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid XA = AX\}$.
- 5p a) Să se determine numerele reale a și b astfel încât $A \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = I_2$.
- 5p b) Să se demonstreze că $A \cdot B = A$, unde $B = A^2 - 2I_2$ și $A^2 = A \cdot A$.
- 5p c) Să se arate că dacă $X \in C(A)$, atunci există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}$.
2. Pe mulțimea $G = (-1, 1)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.
- 5p a) Să se rezolve în G ecuația $x * x = \frac{4}{5}$.
- 5p b) Să se verifice egalitatea $x * y = \frac{(x+1)(y+1) - (x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1) + (x-1)(y-1)}$, pentru oricare $x, y \in G$.
- 5p c) Să se arate că pentru oricare $x, y \in G$ rezultă că $x * y \in G$.

SUBIECTUL III (30p)

- 5p 1. a) Să se studieze continuitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 1 \\ 2x-1, & x \geq 1 \end{cases}$ în punctul $x_0 = 1$.
- 5p b) Să se calculeze derivata funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 1$.
- 5p c) Să se determine numărul real pozitiv a astfel încât $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 32$.
2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+n}$.
- 5p a) Să se calculeze $\int_1^2 f_0(x) dx$.
- 5p b) Pentru $n \in \mathbb{N}$ să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f_n , axa Ox și dreptele $x=1$, $x=2$.
- 5p c) Știind că F este o primitivă a funcției f_1 , să se arate că funcția $G: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) - \frac{5}{6}x$ este crescătoare.

VARIANTA 61

	SUBIECTUL I (30p)
5p	1. Să se calculeze $\log_6 3 + \log_6 10 - \log_6 5$.
5p	2. Să se determine valorile reale nenule ale lui m pentru care graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - (m+1)x + 1$ este tangent axei Ox .
5p	3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $(x-2)(x+1) \leq 3(x+1)$.
5p	4. Să se demonstreze că numărul $\frac{8!}{3! \cdot 5!} - \frac{9!}{2! \cdot 7!}$ este natural.
5p	5. Să se arate că este adevărată egalitatea $\sin x \cdot \cos(90^\circ - x) + \cos^2(180^\circ - x) = 1$, oricare ar fi x măsura unui unghi ascuțit.
5p	6. Să se calculeze aria triunghiului ABC , știind că $AB = AC = 10$ și $m(\sphericalangle A) = 30^\circ$.
	SUBIECTUL II (30p)
	1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X(a) \mid a \in \mathbb{R} \text{ și } X(a) = I_2 + aA\}$.
5p	a) Să se verifice dacă I_2 aparține mulțimii G .
5p	b) Să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(a+b+5ab)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
5p	c) Să se arate că pentru $a \neq -\frac{1}{5}$ inversa matricei $X(a)$ este matricea $X\left(\frac{-a}{1+5a}\right)$.
	2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{3}X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{3}X + \hat{2}$ și $g = X^2 + \hat{2}X$.
5p	a) Să se calculeze $f(\hat{1}) \cdot g(\hat{0})$.
5p	b) Să se verifice că $f = (\hat{3}X + \hat{3}) \cdot g + \hat{2}X + \hat{2}$.
5p	c) Să se determine numărul rădăcinilor din $\mathbb{Z}_5$ ale polinomului f .
	SUBIECTUL III (30p)
	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x - x \ln 2$.
5p	a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$.
5p	c) Să se determine punctul de extrem al funcției f .
5p	2. a) Să se determine primitivele funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.
5p	b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{\frac{\ln x}{x}}$.
5p	c) Să se calculeze $\int_1^3 \frac{1}{x(x+2)} dx$.

VARIANTA 62

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2} = 3$.
- 5p 2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, știind că valoarea maximă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = -x^2 + 2x - m + 3$ este egală cu 10.
- 5p 3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_7(2x+1) = 2$.
- 5p 4. Să se rezolve inecuația $2C_n^2 \leq n+8$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- 5p 5. Să se determine valorile reale ale numărului a , știind că distanța dintre punctele $A(2;1)$ și
 $B(7;a)$ este egală cu 13.
- 5p 6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC , știind că $BC = 20$ și
 $m(\sphericalangle A) = 30^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x - y + mz = 0 \\ 4x + y + 5z = 0 \end{cases}$$
, cu m parametru real și A matricea sistemului.
- 5p a) Să se calculeze determinantul matricei A pentru $m=1$.
- 5p b) Să se determine parametru real m știind că determinantul matricei sistemului este nul.
- 5p c) Pentru $m \neq -1$ să se rezolve sistemul.
2. Se consideră polinoamele $f = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ și
 $g = X^2 - 2X + 1$, cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Să se calculeze diferența $S - S'$, unde $S = x_1 + x_2 + x_3$ și $S' = y_1 + y_2$.
- 5p b) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la g .
- 5p c) Să se calculeze produsul $f(y_1) \cdot f(y_2)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$.
- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- 5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$.
- 5p c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .
2. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
- 5p a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $h: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,
 $h(x) = f(x)$.
- 5p c) Să se arate că dacă, $a > 0$, atunci $\frac{1}{a+2} \leq \int_a^{a+1} f(x) dx \leq \frac{1}{a+1}$.

VARIANTA 63

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine primul termen al unei progresii aritmetice cu rația 4, știind că suma primilor doi termeni este 10.
- 5p 2. Să se determine valorile reale ale numărului m , știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 - mx + m + 2 = 0$ verifică egalitatea $2x_1x_2 = x_1 + x_2$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+2) - \log_2(x+1) = 1$.
- 5p 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $\{11, 12, \dots, 20\}$, acesta să fie număr prim.
- 5p 5. Să se determine coordonatele simetricului punctului A față de punctul M , mijlocul segmentului BC , știind că $A(3;0)$, $B(0;2)$ și $C(3;2)$.
- 5p 6. Să se calculeze aria triunghiului ABC , știind că $AC = 10$, $BC = 16$ și $m(\sphericalangle C) = 60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = A - I_3$.

- 5p a) Să se calculeze determinantul matricei A .
- 5p b) Să se calculeze $A^2 - B^2$, unde $A^2 = A \cdot A$ și $B^2 = B \cdot B$.
- 5p c) Să se arate că inversa matricei B este $B^{-1} = \frac{1}{9}A - I_3$.
2. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$.
- 5p a) Să se arate că $x \circ y = (x+3)(y+3) - 3$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se determine elementul neutru al legii „ $\circ$ ”.
- 5p c) Să se determine $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ astfel încât $C_n^2 \circ C_n^2 = 13$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + \frac{x-1}{x}$.

- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [1, +\infty)$.
- 5p b) Să se studieze monotonia funcției f pe $[1, +\infty)$.
- 5p c) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1, e)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+5, & x < -1 \\ 3x^2+1, & x \geq -1 \end{cases}$.

- 5p a) Să se demonstreze că funcția f admite primitive.
- 5p b) Să se calculeze $\int_{-3}^{-2} f(x) dx$.
- 5p c) Să se arate că, pentru orice $m \in [-1, \infty)$ aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = m$ și $x = m+1$ este cel puțin $\frac{5}{4}$.

VARIANTA 64

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Într-o progresie geometrică, al doilea termen este 3 și raportul dintre primul și al patrulea termen este $\frac{1}{8}$. Să se determine primul termen al progresiei.
- 5p 2. Știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 2009x + 1 = 0$, să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.
- 5p 3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$.
- 5p 4. Să se rezolve inecuația $C_{17}^n \leq C_{17}^{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $n \leq 17$.
- 5p 5. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a dreptelor de ecuații $x + 3y - 1 = 0$ și $3x + 2y + 4 = 0$.
- 5p 6. Să se calculeze lungimea laturii AB a triunghiului ABC știind că $BC = 6$, $AC = 3\sqrt{2}$ și $m(\angle C) = 45^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = I_2 + A$. Se notează
- $$X^n = \underbrace{X \cdot X \cdot \dots \cdot X}_{\text{de } n \text{ ori}}.$$
- 5p a) Să se verifice că $A^2 = O_2$.
- 5p b) Să se calculeze inversa matricei B .
- 5p c) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $B^3 - B^2 = xA$.
2. Se consideră polinomul $f = X^4 - 2X^2 + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Să se arate că polinomul f este divizibil cu $g = X^2 - 1$.
- 5p b) Să se calculeze produsul $S \cdot P$ unde $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ și $P = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$.
- 5p c) Să se calculeze suma $T = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f, h: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ și $h(x) = f^2(x)$.
- 5p a) Să se verifice că $h'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$, oricare ar fi $x \geq 0$.
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Să se demonstreze că funcția h este crescătoare pe intervalul $[0; +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + 1$.
- 5p a) Să se arate că $\int_0^1 (x+1)(x+2)f(x)dx = \frac{22}{3}$.
- 5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.
- 5p c) Să se determine numărul real pozitiv k astfel încât aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = k$ să fie egală cu $k + \ln k$.

VARIANTA 65

	SUBIECTUL I (30p)
5p	1. Să se demonstreze că numărul $\sqrt[3]{27} - \sqrt{12} + 2\sqrt{3}$ este natural.
5p	2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2-4x} = \frac{1}{8}$.
5p	3. Să se determine valorile reale ale lui m , știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 - mx - m - 6 = 0$ verifică relația $4(x_1 + x_2) + x_1x_2 = 0$.
5p	4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie cubul unui număr natural.
5p	5. Să se calculeze aria triunghiului determinat de graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 5$ și axele de coordonate.
5p	6. Să se calculeze $\sin^2 120^\circ + \cos^2 60^\circ$.
	SUBIECTUL II (30p)
	1. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $AB: x + 2y - 4 = 0$ și $BC: 3x + y - 2 = 0$.
5p	a) Să se determine coordonatele punctului B .
5p	b) Pentru $A(4, 0), B(0, 2), C(1, -1)$ să se scrie ecuația medianei triunghiului ABC , duse din vârful C .
5p	c) Pentru $A(4, 0), B(0, 2), C(1, -1)$ să se calculeze aria triunghiului ABC .
	2. Se consideră $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ inelul claselor de resturi modulo 8.
5p	a) Să se calculeze în $\mathbb{Z}_8$ suma $S = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7}$.
5p	b) Să se calculeze în $\mathbb{Z}_8$ produsul elementelor inversabile ale inelului.
5p	c) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_8$ sistemul $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{5}y = \hat{2} \\ \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{5} \end{cases}$.
	SUBIECTUL III (30p)
	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.
5p	a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	b) Să se determine punctele de extrem ale funcției f .
5p	c) Să se demonstreze că $f(x) + f(x^3) \geq -2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$.
5p	a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
5p	b) Să se calculeze $\int_0^1 e^x f(x) dx$.
5p	c) Să se determine numărul real p astfel încât volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(px)$, pentru orice $x \in [0, 1]$ să fie minim.

VARIANTA 66

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se arate că numerele $\log_2 2$, C_3^1 și 5 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p 2. Să se determine punctele de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{x+1} - 1$ cu axele de coordonate.
- 5p 3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 + 2x + 6m - 1 = 0$ verifică relația $x_1 + x_2 = x_1 x_2$.
- 5p 4. Să se calculeze $0! + 1! + 2! + 3!$.
- 5p 5. Să se calculeze lungimile catetelor triunghiului ABC , știind că $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle B) = 60^\circ$ și lungimea ipotenuzei este egală cu 8.
- 5p 6. Să se determine aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(2;0)$, $B(0;4)$ și $C(1;6)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se calculeze $\det(A^2)$, știind că $A^2 = A \cdot A$.
- 5p b) Să se determine $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$ știind că $A \cdot B = I_2$.
- 5p c) Știind că $A \cdot B = I_2$ să se calculeze $S = (B^{-1} - A)^2$.
2. Pe mulțimea numerelor întregi definim legile de compoziție $x * y = x + y - 3$ și $x \circ y = xy - 3(x + y) + 12$.
- 5p a) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $x \circ x = 12$.
- 5p b) Să se arate că $1 \circ (2 * 3) = (1 \circ 2) * (1 \circ 3)$.
- 5p c) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} (x-3) * y = 2 \\ (x-y) \circ 4 = 10 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x+2}, & x \geq 0 \\ x + \frac{3}{2}, & x < 0 \end{cases}$.
- 5p a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Să se arate că $f(x) \in \left[\frac{3}{2}, 2\right)$, oricare ar fi $x \in [0; +\infty)$.
- 5p 2. a) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{1}{x^2 + 2x} dx$.
- 5p b) Să se demonstreze că $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \leq 1$.
- 5p c) Se consideră funcția $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ și numerele reale pozitive a , b și c . Să se demonstreze că, dacă numerele $\int_1^a f(x) dx$, $\int_1^b f(x) dx$, $\int_1^c f(x) dx$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, atunci numerele a , b , c sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

VARIANTA 67

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se arate că $C_5^1 + 1 = P_3$.
- 5p 2. Să se determine punctele de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ cu axele de coordonate.
- 5p 3. Să se demonstreze că pentru orice $m \in \mathbb{R}$ ecuația $x^2 + mx - m^2 - 1 = 0$ are două soluții reale distincte.
- 5p 4. Să se determine suma primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, știind că suma primilor doi termeni ai progresiei este egală cu 8, iar diferența dintre al doilea termen și primul termen este egală cu 4.
- 5p 5. Să se calculeze lungimea laturii AC a triunghiului ABC , știind că $m(\sphericalangle B) = 45^\circ$, $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$ și $AB = 10$.
- 5p 6. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5, -4)$ și $B(0, 8)$. Să se calculeze lungimea segmentului AM , unde M este mijlocul segmentului AB .

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax + 2y = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$ cu $a \in \mathbb{R}$ și $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ matricea sistemului. $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Se notează $A^2 = A \cdot A$.
- 5p a) Pentru $a = -1$ să se rezolve sistemul.
- 5p b) Să se verifice egalitatea $A^2 - (a+1)A + (a-8)I_2 = O_2$.
- 5p c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că matricea A verifică egalitatea $A^2 = 9I_2$.
2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y + 11$.
- 5p a) Să se arate că legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă.
- 5p b) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de 6 ori } x} = 1$.
- 5p c) Să se demonstreze că $(\mathbb{Z}, \circ)$ este grup comutativ.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ și $g(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$.
- 5p a) Să se calculeze $f'(x) - g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$.
- 5p c) Să se demonstreze că $f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcțiile $f, F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + \frac{x-1}{x}$ și $F(x) = e^x + x - \ln x$.
- 5p a) Să se demonstreze că funcția F este o primitivă pentru funcția f .
- 5p b) Să se calculeze $\int_1^2 x(F(x) - x + \ln x) dx$.
- 5p c) Să se determine parametrul real m astfel încât aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ să fie egală cu $e^m - 2$.

VARIANTA 68

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $-4 < 3x + 2 < 4$.
- 5p 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x+4} = 2\sqrt{x}$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 7$.
- 5p 4. Să se determine cât la sută din $a + b$ reprezintă numărul a , știind că a este egal cu 25% din b .
- 5p 5. Să se calculeze lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic, știind că aria acestuia este 18, iar măsura unui unghi este egală cu 45° .
- 5p 6. Să se demonstreze că expresia $(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin x \cdot \cos x$ este constantă, pentru oricare număr real x .

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$ cu $x \in \mathbb{R}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se notează $A = A \cdot A$.
- 5p a) Să se determine numărul real x pentru care $\det(A) = 0$.
- 5p b) Să se verifice egalitatea $A^2 = (2x-6)A - (x^2 - 6x + 8) \cdot I_2$.
- 5p c) Să se determine numărul real x pentru care $A^2 = 2A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - 2(x+y) + 6$.
- 5p a) Să se arate că $x \circ y = (x-2)(y-2) + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se demonstreze că $x \circ 2 = 2$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Știind că legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei
 $E = (-2009) \circ (-2008) \circ \dots \circ (-2) \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \dots \circ 2008 \circ 2009$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x$.
- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
- 5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^3}$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-2}, & x \in (-\infty, 1] \\ \ln x - 2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$.
- 5p a) Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
- 5p b) Să se calculeze $\int_0^1 (x-2)f(x)dx$.
- 5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x (f(t) + 2) dt$.

VARIANTA 69

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $C_6^2 - C_6^4$.
- 5p 2. Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $x(x-1) \leq x+15$.
- 5p 3. Să se determine valorile reale ale numărului m astfel încât graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = x^2 - (m-1)x - m$ să fie tangent axei Ox .
- 5p 4. Să se arate că numărul $A = \log_3 \frac{2}{1} + \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{4}{3} + \dots + \log_3 \frac{9}{8}$ este natural.
- 5p 5. Să se calculeze $\sin 10^\circ - \cos 80^\circ$.
- 5p 6. Să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ cu vârfurile $M(2;0)$, $N(6;4)$, $P(4;6)$ și $Q(0;2)$ este dreptunghi.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cu $x, y \in \mathbb{R}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\det(A) = 0$.
- 5p b) Pentru $a = 3$ să se verifice că $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Pentru $a = 3$ să se rezolve ecuația matricială $A \cdot X = B$.
2. Pe mulțimea $G = (-1, 1)$ se consideră legea de compoziție $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.
- 5p a) Să se calculeze $\frac{1}{2} * \frac{1}{2}$.
- 5p b) Fie funcția $f: (-1, 1) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Să se verifice că $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru oricare $x, y \in G$.
- 5p c) Să se demonstreze că legea "*" este asociativă.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \frac{x^2}{2}$.
- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0; +\infty)$.
- 5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- 5p c) Să se determine intervalele de convexitate și intervalele de concavitate ale funcției f .
2. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^n$, $n \in \mathbb{Z}^*$.
- 5p a) Pentru $n = 2$ să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.
- 5p b) Pentru $n = -1$ să se determine $a \in [0; +\infty)$ astfel încât $\int_0^a f(x) dx = 0$.
- 5p c) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) f(x) dx$.

VARIANTA 70

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.
- 5p 2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât minimul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - mx + m$ să fie egal cu 1.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x^2 = 2$.
- 5p 4. Să se calculeze $C_4^2 + C_4^3$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1;1)$, $B(-1;0)$ și $C(3;-4)$. Să se determine lungimea segmentului AM , unde M este mijlocul lui (BC) .
- 5p 6. Să se determine $\cos(180^\circ - x)$, știind că x este măsura unui unghi ascuțit și $\cos x = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Se notează $A^2 = A \cdot A$.

- 5p a) Pentru $a = 1$ să se calculeze matricea A^2 .
- 5p b) Să se calculeze $\det(A^2)$, $a \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Să se demonstreze că $A^2 \neq I_3$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale definim legile de compoziție $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ și $x \circ y = xy - 3(x + y) + 12$.
- 5p a) Să se verifice că $(x * 2) - (3 \circ x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Știind că e_1 este elementul neutru în raport cu legea de compoziție „ $*$ ” și e_2 este elementul neutru în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ”, să se calculeze $(e_1 * e_2) + (e_1 \circ e_2)$.
- 5p c) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + 1$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$, oricare $x, y \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \sqrt{x}$.

- 5p a) Să se calculeze $f'(x), x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Să se arate că funcția f este crescătoare pe $(0, +\infty)$.
- 5p c) Să se determine coordonatele punctului graficului funcției f , în care tangenta la grafic are panta egală cu $\frac{3}{2}$.

2. Se consideră funcția $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$.

- 5p a) Să se verifice că $\int (x+1)(x+2)f(x)dx = x^2 + 3x + C, x \geq 0$.
- 5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.
- 5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = f(x) - f(x+1) - \frac{1}{x+1}$.

VARIANTA 71

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se verifice că $C_5^1 + C_5^3 + C_5^5 = 2^4$.
- 5p 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x \cdot 3^x = 36$.
- 5p 3. Să se arate că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ verifică relația $x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 2 \geq 0$, pentru orice $m \in \mathbb{R}$.
- 5p 4. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x^2 + 2x - 3) = 1$.
- 5p 5. Triunghiul ABC are centrul de greutate G . Dacă punctul M este mijlocul segmentului BC , să se determine numărul real a astfel încât $\overrightarrow{AG} = a \cdot \overrightarrow{MA}$.
- 5p 6. Să se calculeze aria paralelogramului $ABCD$, știind că $AB = 8$, $BC = 10$ și $m(\angle BCD) = 150^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $M = \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ cu x și y numere reale. În reperul cartezian xOy se consideră

punctele $A(1,2)$, $B(0,3)$, $O(0,0)$ și $C_n(n+1, 2-n)$ cu $n \in \mathbb{N}^*$.

- 5p a) Să se calculeze determinantul matricei M .
- 5p b) Să se arate că punctele A, B și C_2 sunt coliniare.
- 5p c) Să se determine numărul natural nenul n astfel încât aria triunghiului AOC_n să fie minimă.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \perp y = (x-3)(y-3) + 3$.
- 5p a) Să se arate că $(x+3) \perp \left(\frac{1}{x} + 3\right) = 4$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^*$.
- 5p b) Să se arate că legea „ $\perp$ ” are elementul neutru $e = 4$.
- 5p c) Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii $\mathbb{R}$ în raport cu legea „ $\perp$ ”.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = \ln x$ și $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$.

- 5p a) Să se determine funcția f_1 .
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f_2 .
- 5p c) Să se arate că $f_0(x) \leq \frac{1}{f_1(x)} - 1$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

- 5p a) Să se calculeze $\int_0^{\sqrt{e-1}} f(x) dx$.
- 5p b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.
- 5p c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx > \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx$.

VARIANTA 72

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - \log_5 25$.
- 5p 2. Să se arate că vârful parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$ are coordonatele egale.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3 + x + 1} = x$.
- 5p 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 91\}$, acesta să fie divizibil cu 13.
- 5p 5. Să se calculeze cosinusul unghiului ascuțit format de diagonalele dreptunghiului $ABCD$, știind că $AB = 16$ și $BC = 12$.
- 5p 6. Să se calculeze $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -5 \\ x + 2y + \alpha z = 0 \\ 5x - 4y + 7z = \beta \end{cases}$$
 unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, A este matricea sistemului și

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 5 & -4 & 7 & \beta \end{pmatrix}. \text{ Notăm cu } S(\alpha, \beta) \text{ suma elementelor matricei } B.$$

- 5p a) Să se calculeze $S(0, 0)$.
- 5p b) Să se determine numerele reale α și β astfel încât determinantul matricei A să fie nul și $S(\alpha, \beta) = -2$.
- 5p c) Pentru $\alpha = 0$ și $\beta = 0$ să se rezolve sistemul.
2. În mulțimea polinoamelor $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinoamele $f = X^3 + mX^2 + nX + 6$ și $g(X) = X^2 - X - 2$.
- 5p a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2 - x - 2 = 0$.
- 5p b) Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul g .
- 5p c) Pentru $m = -4$ și $n = 1$ să se calculeze produsul $P = f(0) \cdot f(1) \cdot \dots \cdot f(2008) \cdot f(2009)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$.
- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.
- 5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- 5p c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
2. Se consideră funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$.
- 5p a) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f .
- 5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2}$.

VARIANTA 73

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze al cincilea termen al unei progresii aritmetice, știind că primul termen al progresiei este 7 și al doilea termen este 9.
- 5p 2. Să se rezolve ecuația $C_n^2 = 6$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- 5p 3. Să se arate că mulțimea $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0\right\}$ are două elemente, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.
- 5p 4. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x+4) + \lg(2x+3) = \lg(1-2x)$.
- 5p 5. Să se arate că dacă $\overline{AB} = \overline{AC}$, atunci punctul C este mijlocul segmentului AB .
- 5p 6. Să se determine lungimile catetelor AB și AC ale triunghiului dreptunghic ABC , știind că $\sin B = \frac{3}{5}$ și $BC = 15$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Știind că $a = -1$, $b = 0$ și $c = 1$, să se calculeze determinantul Δ .
- 5p b) Să se arate că $\Delta = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} 2^x & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 1 \\ 1 & 1 & 2^x \end{vmatrix} = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi se consideră legile de compoziție $x * y = x + y + 3$, $x \circ y = ax + y - 3$, cu $a \in \mathbb{Z}$ și funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 6$.
- 5p a) Să se calculeze $(1 * 2) * (0 \circ 3)$.
- 5p b) Să se determine numărul întreg a pentru care legea de compoziție " $\circ$ " este asociativă.
- 5p c) Pentru $a = 1$ să se arate că funcția f este morfism între grupurile $(\mathbb{Z}, *)$ și $(\mathbb{Z}, \circ)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3}{x^2+1}, & x \leq 1 \\ \frac{2x+a}{x^2+2}, & x > 1 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Să se determine numărul real a astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0 = 1$.
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficului funcției f .
- 5p c) Să se determine numărul real a astfel încât panta tangentei la grafic în punctul $(2; f(2))$ să fie egală cu 1.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$.
- 5p a) Să se verifice că $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = e - 1$.
- 5p b) Să se calculeze $\int_0^1 x f(x) dx$.
- 5p c) Să se demonstreze că $1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq e$.

VARIANTA 74

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $C_8^5 - C_8^3$.
- 5p 2. Să se determine rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_1 = 3$ și $b_2 - b_1 = 3$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 \sqrt{x+1} = 1$.
- 5p 4. Să se formeze o ecuație de gradul al doilea, ale cărei soluții x_1 și x_2 verifică relațiile $\begin{cases} x_1 + x_2 = 11 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{11}{30} \end{cases}$.
- 5p 5. Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(2;5)$ și este paralelă cu dreapta de ecuație $x + y - 2 = 0$.
- 5p 6. Să se calculeze aria dreptunghiului $ABCD$, știind că $AC = 10$ și $m(\angle BAC) = 30^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se calculeze $\det(A^2)$, unde $A^2 = A \cdot A$.
- 5p b) Să se arate că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $XA = AX$, atunci există $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
- 5p c) Să se arate că dacă $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, atunci ecuația $Y^2 = A$ nu are soluție în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$.
- 5p a) Să se calculeze numărul elementelor inversabile în raport cu înmulțirea din inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$.
- 5p b) Se consideră S suma soluțiilor ecuației $\hat{2}x + \hat{1} = \hat{5}$ și P produsul soluțiilor ecuației $x^2 = x$, unde $x \in \mathbb{Z}_6$. Să se calculeze $S + P$.
- 5p c) Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element din inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$, acesta să fie soluție a ecuației $x^3 = \hat{0}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f, h: \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2)$ și $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.
- 5p a) Să se arate că $h(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$.
- 5p b) Să se demonstreze că funcția h este descrescătoare pe $(-\infty; 1)$.
- 5p c) Să se arate că $(f'(x))^2 \geq f(x) \cdot f''(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2009} + x + 1$.
- 5p a) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $h: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - x^{2009} - 1$.
- 5p b) Să se determine primitiva $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f , care verifică condiția $F(0) = 1$.
- 5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^{2010}}$.

VARIANTA 75

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine numărul real x , știind că șirul $1, x, x+2, 7, \dots$ este progresie aritmetică.
- 5p 2. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a graficelor $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = x^2 - 3x - 1$ și $g(x) = x + 4$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3 + x^2 - x - 2} = x$.
- 5p 4. O persoană a depus la o bancă 1500 de lei. Ce sumă a primit persoana după un an, știind că rata dobânzii a fost de 8 %?
- 5p 5. Fie triunghiul echilateral MNP înscris într-un cerc de centru O . Să se demonstreze că
 $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \vec{0}$.
- 5p 6. Să se calculeze aria paralelogramului $ABCD$ în care $AB = 6\sqrt{3}$, $AD = 4$ și $m(\angle DAB) = 150^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 5p a) Să se calculeze A^2 , unde $A^2 = A \cdot A$.
- 5p b) Să se demonstreze că $(A + I_2)^{-1} = A - I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Să se determine numerele reale x pentru care $\det(x^2 A) = x^2 \det(A)$.
2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x * y = xy + 3x + ay + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât legea „ $*$ ” să fie comutativă.
- 5p b) Să se arate că pentru $a = 3$ și $b = 6$ legea „ $*$ ” admite element neutru.
- 5p c) Să se determine a și b astfel încât $(-3) * x = -3$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1}, & x \leq 0 \\ -2x + 1, & x > 0 \end{cases}$.
- 5p a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.
- 5p b) Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$.
- 5p c) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.
2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^n}$.
- 5p a) Să se verifice că $\int_1^e f_1(\sqrt{x-1}) dx = 1$.
- 5p b) Să se determine primitiva G a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f_2(x)}$, care verifică relația $G(1) = \frac{13}{15}$.
- 5p c) Să se calculeze $\int_0^1 x \cdot f_n(x) dx$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

VARIANTA 76

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se arate că numerele 1, $\log_3 9$ și $\sqrt[3]{64}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x$. Să se calculeze $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(6)$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = 2\sqrt{3}$.
- 5p 4. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 0)$ și $B(5, -2)$. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului AB .
- 5p 6. Să se calculeze $\sin^2 135^\circ + \cos^2 45^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x - ay - z = 0 \\ x + 4y - 2z = 16 \\ x - 2y + 2z = -6 \end{cases}$$
, unde $a \in \mathbb{R}$ și matricea sistemului $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se determine valorile reale ale lui a astfel încât matricea A să fie inversabilă.
- 5p b) Să se calculeze A^2 , unde $A^2 = A \cdot A$.
- 5p c) Să se rezolve sistemul pentru $a = 1$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.
- 5p a) Să se arate că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se demonstreze că $x \circ (-4) \circ y = -4$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Să se calculeze $1 \circ (-2) \circ 3 \circ (-4) \circ 5 \circ (-6)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$.
- 5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$, pentru orice $x \in (0; +\infty)$.
- 5p b) Să se arate că $2009\sqrt{2011} \leq 2010\sqrt{2010}$.
- 5p c) Să se arate că funcția f nu are asimptotă către $+\infty$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, & x < 1 \\ (x+1)\ln x, & x \geq 1 \end{cases}$.
- 5p a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
- 5p b) Să se verifice că $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{6}$.
- 5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $h: [1; e] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{f(x)}{x+1}$.

VARIANTA 77

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se verifice că $\log_2 5 + \log_2 12 - \log_2 30 = 1$.
- 5p 2. Să se arate că, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$, parabola asociată funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - mx + m^2 + 1$ este situată deasupra axei Ox .
- 5p 3. Să se determine numărul real a , știind că numerele $2^a, 4^a + 1$ și 2^{a+2} sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p 4. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația $C_{n+1}^1 = n^2 - 1$.
- 5p 5. Să se demonstreze că în patrulaterul $MNPQ$ are loc relația $\overline{MN} + \overline{PQ} = \overline{MQ} + \overline{PN}$.
- 5p 6. Să se arate că, pentru orice unghi ascuțit x , este adevărată egalitatea $\sin x \cdot \cos(90^\circ - x) + \cos^2(180^\circ - x) = 1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1), B(1,2)$ și $C_n(n, -n)$, cu $n \in \mathbb{Z}$.
- 5p a) Să se scrie ecuația dreptei C_4C_2 .
- 5p b) Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}^*$ punctele O, C_n, C_{n+1} , sunt coliniare.
- 5p c) Să se calculeze aria triunghiului ABC_3 .
2. Se consideră matricele $A_x = \begin{pmatrix} 2009^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, cu $x \in \mathbb{R}$ și mulțimea $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- 5p a) Să se verifice că $I_3 \in G$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p b) Să se demonstreze că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Să se arate că $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x-3)\ln x$.
- 5p a) Să se calculeze $f'(x), x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- 5p c) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $(0, +\infty)$.
2. Se consideră funcțiile $F, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = x \cdot e^x$ și $f(x) = (x+1)e^x$.
- 5p a) Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f .
- 5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției F , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.
- 5p c) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{F(x) - f(x)}{e^x + 1} dx$.

VARIANTA 78

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $\frac{2 + C_4^1}{A_3^1}$.
- 5p 2. Să se determine $x \in \mathbb{R}$, știind că numerele $x-1$, $x+1$ și $2x-1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p 3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Să se calculeze $f(0) + f(1) + \dots + f(4)$.
- 5p 4. Să se determine valoarea parametrului real m , știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 - (m-1)x - m = 0$ verifică relația $x_1 + x_2 = 2(x_1x_2 + 4)$.
- 5p 5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele $A(2,1)$ și $B(1,-2)$.
- 5p 6. Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic ABC , cu $m(\angle A) = 90^\circ$, are loc relația $AD^2 = AB \cdot AC \cdot \sin B \sin C$, unde D este piciorul înălțimii duse din vârful A .

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea matricelor $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.
- 5p a) Pentru $A, B \in G$, să se demonstreze că $A + B \in G$.
- 5p b) Să se arate că matricea $C \in G$, obținută pentru $a = 5$ și $b = 3$, verifică relația $C^2 = 10C - 16I_2$, unde $C^2 = C \cdot C$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Pentru $a, b \in \mathbb{N}$ să se determine o matrice $D \in G$ care are proprietatea că $\det(D) = 2008$.
2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f(X) = (X+1)^{2009} - (X-1)^{2009}$ care are forma algebrică $f = a_{2009}X^{2009} + a_{2008}X^{2008} + \dots + a_1X + a_0$.
- 5p a) Să se determine a_0 .
- 5p b) Să se arate că $f(1) + f(-1)$ este număr întreg par.
- 5p c) Să se determine numărul rădăcinilor reale ale polinomului f .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.
- 5p a) Să se verifice că $f'(x) - \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Să se arate că $f(\sqrt[3]{2008}) \leq f(\sqrt[3]{2009})$.
2. Se consideră funcțiile $f, g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$ și $g(x) = x \cdot e^x$.
- 5p a) Să se determine $\int f(x) dx$.
- 5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.
- 5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$.

VARIANTA 79

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $\frac{\log_5 18 - \log_5 2}{\log_5 3}$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x + 2$, $h(x) = 3x + 3$. Să se determine numărul real a astfel încât $a(f(x) + h(x)) = g(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{1}{2^x} = \frac{4^x}{8}$.
- 5p 4. Să se determine câte numere naturale de 4 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 0)$ și $B(m^2 - 1, 0)$, cu $m \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât punctul $C(5, 0)$ să fie mijlocul segmentului AB .
- 5p 6. Se consideră patrulaterul $ABCD$ în care $\overline{DC} + \overline{BC} = \overline{AC}$. Să se demonstreze că $ABCD$ este paralelogram.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 5p a) Să se calculeze $A \cdot B$.
- 5p b) Să se rezolve ecuația matricială $A \cdot X = B$, unde $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 5p c) Să se demonstreze că matricea A verifică egalitatea $A^2 - 4A + 5I_2 = O_2$, unde $A^2 = A \cdot A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = x + y - 14$.
- 5p a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = 2$.
- 5p b) Să se demonstreze că legea " $\circ$ " este asociativă.
- 5p c) Să se demonstreze că $(\mathbb{R}, \circ)$ este grup comutativ.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + 3^x$.
- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se determine asimptota spre $-\infty$ a funcției f .
- 5p c) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.
2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{x+1}$.
- 5p a) Să se calculeze $\int_1^{\frac{1}{2}} (x+1) \cdot f_2(x) dx$.
- 5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1 , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.
- 5p c) Să se arate că $\int_0^1 f_{2009}(x) dx \leq \ln 2$.

VARIANTA 80

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $\frac{2!+3!}{C_8^1}$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$. Să se arate că numerele $f(1)$, $f(0)$ și $f(-3)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p 3. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+x=y \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p 4. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_5(3x+1) = 1 + \log_5(x-1)$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul N , simetricul punctului $M(-2, 3)$ față de punctul O . Să se calculeze lungimea segmentului MN .
- 5p 6. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC . Să se determine măsura unghiului A , știind că $BC = 6$ și raza cercului circumscris triunghiului are lungimea egală cu $2\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $D(a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}$, unde a este un număr real.

- 5p a) Să se calculeze valoarea determinantului pentru $a = -1$.
- 5p b) Să se demonstreze că $D(a) = -(a-1)^2(a+2)$, pentru orice a număr real.
- 5p c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D(a) = -4$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - 10(x+y) + 110$.
- 5p a) Să se verifice că $x \circ y = (x-10)(y-10) + 10$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se calculeze $C_{10}^1 \circ C_{20}^1$.
- 5p c) Să se rezolve ecuația $x \circ (x-1) = 10$, unde $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$.

- 5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Să se demonstreze că $f(x) \geq 4$, pentru orice $x \in (1; +\infty)$.
2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{e^x}{e^{nx} + 1}$.
- 5p a) Să se calculeze $\int f_0(x) dx$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1 , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.
- 5p c) Să se arate că $\int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

VARIANTA 81

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $\log_2 \frac{1}{4} - \sqrt[3]{-8}$.
- 5p 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $(2x-1)(x+1) \leq -x+11$.
- 5p 3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x + 6$. Să se arate că $f(x) \leq f(2)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p 4. După două ieftiniri succesive cu 10 %, respectiv 25 %, prețul unui produs este 540 lei. Să se determine prețul produsului înainte de cele două ieftiniri.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(2, m)$, unde m este un număr real. Să se determine numerele reale m pentru care $OM = \sqrt{5}$.
- 5p 6. Să se determine lungimea laturii BC a triunghiului ABC , știind că $AC = 6$, $AB = 4$ și $m(\angle BAC) = 60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & x_k & x_k^2 \\ -2 & x_k^2 & x_k \end{pmatrix}$, cu $k \in \{0, 1, 2\}$. $x_0 = 1$ și x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 + x - 2 = 0$, $x_1 < x_2$.
- 5p a) Să se calculeze determinantul matricei $A(0)$.
- 5p b) Să se determine matricea $A(1) + A(2)$.
- 5p c) Să se calculeze suma elementelor matricei $A(k)$, pentru fiecare $k \in \{0, 1, 2\}$.
2. Pe mulțimea $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ se consideră operația $x \circ y = x^{2 \ln y}$.
- 5p a) Să se calculeze $3 \circ e$, unde e este baza logaritmului natural.
- 5p b) Să se demonstreze că $x \circ y \in G$, pentru orice $x, y \in G$.
- 5p c) Să se arate că operația " $\circ$ " este asociativă pe mulțimea G .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$.
- 5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x > 0$.
- 5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1; -1)$.
- 5p c) Să se arate că $f(x) \geq -1$, pentru orice $x > 0$.
2. Se consideră funcția $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = ax + 1$, unde $a \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + x + 1$ să fie o primitivă a funcției f_a .
- 5p b) Să se calculeze $\int_0^1 e^x f_1(x) dx$.
- 5p c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f_a^2(x) dx \geq \frac{1}{4}$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

VARIANTA 82

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $\sqrt[3]{9} - \frac{3}{\sqrt[3]{3}}$.
- 5p 2. Ecuația $x^2 + ax - a - 1 = 0$, cu $a \in \mathbb{R}$ are soluțiile x_1 și x_2 . Să se arate că expresia $x_1 + x_2 - x_1x_2$ nu depinde de a .
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{2^x}{3^x} = \frac{3}{2}$.
- 5p 4. Știind că vectorul $\overline{AB}$ are lungimea egală cu 12 și $\overline{AC} = 2\overline{CB}$, să se determine lungimea vectorului $\overline{CB}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, -1)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$ și $D(2, 3)$. Să se demonstreze că dreptele AB și CD sunt paralele.
- 5p 6. Știind că $\sin 80^\circ - \cos 80^\circ = a$, să se calculeze $\sin 100^\circ + \cos 100^\circ - a$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $D(a; b; x) = \begin{vmatrix} 1 & x & ab \\ 1 & a & bx \\ 1 & b & ax \end{vmatrix}$, unde a, b și x sunt numere reale.
- 5p a) Să se calculeze $D(1; 1; 0)$.
- 5p b) Să se demonstreze că $D(a; b; x)$ nu depinde de numărul real x .
- 5p c) Să se rezolve ecuația $D(a; b; x) = 0$, unde a și b sunt numere reale pozitive.
2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 3X + a$ și $g(x) = X^2 - 3X + 2$, unde $a \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Pentru $a = 2$ să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = g(x)$.
- 5p b) Să se determine rădăcinile polinomului f , știind că are o rădăcină dublă pozitivă.
- 5p c) Pentru $a = 2$ să se rezolve ecuația $e^{f(x)} = g\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 3)\sqrt{x}$.
- 5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{3x - 3}{2\sqrt{x}}$, pentru orice $x > 0$.
- 5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1; -2)$.
- 5p c) Să se demonstreze că $x + \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 3$ pentru orice $x > 0$.
2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{x^n}$.
- 5p a) Să se determine $\int_0^1 f_1(x) dx$.
- 5p b) Să se calculeze $\int_0^1 x \cdot f_1(x) dx$.
- 5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x \cdot f_3(x)$.

VARIANTA83

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $2C_3^1 - A_3^2$.
- 5p 2. Să se arate că $\log_2 14 + \log_2 3 - \log_2 6 = \log_2 7$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 - x - 2}$.
- 5p 4. Să se arate că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 - (m+1)x + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$, verifică relația $x_1 + x_2 - x_1 x_2 = 1$.
- 5p 5. Să se determine aria triunghiului ABC , în care $AB = 4$, $AC = 6$ și $m(\angle BAC) = 45^\circ$.
- 5p 6. Să se calculeze $\sin 135^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ - \cos 45^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 2x^2 + 2x \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 5p a) Să se calculeze $f(0) + f(1)$.
- 5p b) Să se arate că $f(1) \cdot f(-1) = I_3$ unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Să se demonstreze că $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$.
- 5p a) Să se rezolve ecuația $\hat{2}x + \hat{5} = \hat{1}$, pentru $x \in \mathbb{Z}_6$.
- 5p b) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_6$.
- 5p c) Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} \hat{2}x + y = \hat{4} \\ x + \hat{2}y = \hat{5} \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}_6$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, unde $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- 5p c) Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
- 5p a) Să se determine $\int f(x) dx$, unde $x > 0$.
- 5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = f(x)$, $x \in [1, 2]$.
- 5p c) Să se calculeze $\int_1^e f(x) \ln x dx$.

VARIANTA 84

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se compare numerele $a = \sqrt{2}$ și $b = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.
- 5p 2. Să se demonstreze că parabola asociată funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 4$ este tangentă axei Ox .
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x \cdot 5^x = 15$.
- 5p 4. Să se calculeze TVA-ul pentru un produs, știind că prețul de vânzare al produsului este 357 lei, (procentul TVA-ului este 19 %).
- 5p 5. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ care are $AB = 8$ și $BC = 6$. Să se calculeze cosinusul unghiului ascuțit format de diagonalele dreptunghiului.
- 5p 6. Se consideră pătratul $ABCD$ de centru O . Să se calculeze $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se arate că $A = B + I_3$.
- 5p b) Să se demonstreze că matricea A este inversabilă și să se determine A^{-1} .
- 5p c) Să se determine numărul real a astfel încât $\det(X(a)) = (2a - 1)^3$, unde $X(a) = I_3 + aA$.
2. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x * y = xy - x - y + 2$.
- 5p a) Să se demonstreze că $x * y = (x - 1)(y - 1) + 1$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se demonstreze că legea "*" este asociativă.
- 5p c) Să se calculeze $\frac{\sqrt{1}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} * \dots * \frac{\sqrt{2009}}{2}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{e^x}$.
- 5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{e^x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Să se arate că $f(x) \geq \frac{1}{e}$ pentru orice $x \leq 2$.
2. Se consideră funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x + 2}$.
- 5p a) Să se determine $\int f^2(x) dx$.
- 5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.
- 5p c) Folosind, eventual, faptul că $\sqrt{x + 2} \leq \sqrt{3}$ pentru orice $x \in [0, 1]$, să se arate că $\int_0^1 x^{2009} f(x) dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2010}$.

VARIANTA 85

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine al patrulea termen al unei progresii geometrice care are primul termen egal cu 16 și rația $\frac{1}{2}$.
- 5p 2. Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y=-6 \\ xy=8 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{1}{2^x} = 4$.
- 5p 4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr de două cifre format cu elementele mulțimii A , acesta să aibă cifrele egale.
- 5p 5. Se consideră paralelogramul $ABCD$. Să se demonstreze că $\overline{AC} + \overline{BD} = 2\overline{AD}$.
- 5p 6. Să se calculeze $\sin(180^\circ - x)$, știind că $\sin x = \frac{4}{5}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+ay+2z=1 \\ x+(2a-1)y+3z=1 \\ x+ay+(a-3)z=1 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$ și matricea sistemului $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2a-1 & 3 \\ 1 & a & a-3 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se arate că $\det(A) = a^2 - 6a + 5$.
- 5p b) Să se rezolve ecuația $\det(A) = 0$.
- 5p c) Pentru $a = 0$ să se rezolve sistemul în mulțimea numerelor reale.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 6x - 6y + 42$.
- 5p a) Să se arate că $x * y = (x-6)(y-6) + 6$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x * x = x$.
- 5p c) Să se calculeze $1 * 2 * 3 * \dots * 2009$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.
- 5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f .
- 5p c) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0, +\infty)$.
2. Se consideră funcțiile $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ și $g(x) = e^x + e^{-x}$.
- 5p a) Să se determine $\int f(x) dx$.
- 5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $h(x) = x f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.
- 5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției g .

VARIANTA 86

	SUBIECTUL I (30p)
5p	1. Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.
5p	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5^{-x}$. Să se calculeze $f(-1) + f(0) + 5f(1)$.
5p	3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $(3+2\sqrt{2})^x = (1+\sqrt{2})^2$.
5p	4. Să se determine numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
5p	5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 1)$ și $B(4, -3)$. Să se determine coordonatele punctului M, mijlocul segmentului AB .
5p	6. Să se calculeze $\cos(180^\circ - x)$, știind că $\cos x = \frac{1}{3}$.
	SUBIECTUL II (30p)
	1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid X^2 = -I_2\}$, unde $X^2 = X \cdot X$.
5p	a) Să se verifice că $A \in G$.
5p	b) Să se demonstreze că $\left(\frac{1}{2}(X + I_2)\right)^2 = \frac{1}{2}X$, oricare ar fi $X \in G$.
5p	c) Să se demonstreze că orice matrice pătratică de ordinul al doilea cu elemente numere reale pentru care avem $A \cdot X = X \cdot A$ este de forma $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.
	2. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$.
5p	a) Pentru $c = 501$ să se demonstreze că $f(1) + f(-1) = 1004$.
5p	b) Pentru $a = -2$, $b = 2$ și $c = -1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f .
5p	c) Să se demonstreze că nu există valori reale ale coeficienților a, b, c astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul $g = X^3 - X$.
	SUBIECTUL III (30p)
	1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
5p	a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.
5p	b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(e, \frac{1}{e}\right)$.
5p	c) Să se arate că $\ln x \leq \frac{x}{e}$, pentru orice $x > 0$.
	2. Se consideră funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \sqrt{x}$.
5p	a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției f .
5p	b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f .
5p	c) Folosind, eventual, faptul că $\sqrt{x} \geq x$, pentru orice $x \in [0, 1]$, să se arate că $\int_0^1 f^{2009}(x) dx \leq \frac{1}{2010}$.

VARIANTA 87

	SUBIECTUL I (30p)
5p	1. Să se determine termenul al patrulea al unei progresii aritmetice, știind că primul termen este 2 și rația este 3.
5p	2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^2 - x + m = 0$ să admită soluții de semne contrare.
5p	3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 - x - 2) - \log_2(2x - 4) = 1$.
5p	4. Să se rezolve ecuația $C_n^1 + A_n^2 = 4$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
5p	5. Să se determine aria unui triunghi ABC , știind că $AB = AC = 2$ și $m(\angle A) = 30^\circ$.
5p	6. Să se calculeze $2 \sin^2 135^\circ$.
	SUBIECTUL II (30p)
	1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid X^2 = X\}$, unde $X^2 = X \cdot X$.
5p	a) Să se verifice că $A \in G$.
5p	b) Să se calculeze $\det(A^3 - 2A^2 + A)$, unde $A^3 = A \cdot A \cdot A$.
5p	c) Să se demonstreze că $(2X - I_2)^2 = I_2$, oricare ar fi $X \in G$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - \sqrt{2009}(x + y) + 2009 + \sqrt{2009}$.
5p	a) Să se arate că $x * y = (x - \sqrt{2009})(y - \sqrt{2009}) + \sqrt{2009}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
5p	b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „*“.
5p	c) Știind că legea de compoziție „*“ este asociativă, să se calculeze $(-\sqrt{2009}) * (-\sqrt{2008}) * \dots * 0 * \dots * (\sqrt{2008}) * (\sqrt{2009})$.
	SUBIECTUL III (30p)
	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^x$.
5p	a) Să se verifice că $f'(x) = (x + 1)(x + 3) \cdot e^x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
5p	b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .
5p	c) Să se demonstreze că $f(-2) + f(-4) \leq \frac{8}{e^3}$.
	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$.
5p	a) Să se arate că funcția f admite primitive.
5p	b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este convexă pe $(1; +\infty)$.
5p	c) Să se calculeze $\int_0^e f(x) dx$.

VARIANTA 88

	SUBIECTUL I (30p)
5p	1. Să se determine rația unei progresii aritmetice în care primul termen este 10 și al patrulea termen este 19.
5p	2. Să se determine valoarea minimă a funcției $f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x + 1$.
5p	3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$.
5p	4. Să se determine prețul inițial al unui produs care, după o scumpire cu 15 %, costă 460 lei.
5p	5. Să se determine coordonatele punctului M , mijlocul segmentului AB , știind că $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\overrightarrow{OB} = 7\vec{i} + 2\vec{j}$.
5p	6. Să se calculeze $\sin 100^\circ + \cos 100^\circ - \sin 80^\circ + \cos 80^\circ$.
	SUBIECTUL II (30p)
	1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x + ay + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real și matricea sistemului $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
5p	a) Pentru $a = 0$ să se calculeze A^2 , unde $A^2 = A \cdot A$.
5p	b) Să se determine valorile reale ale numărului a pentru care matricea A este inversabilă.
5p	c) Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ să se rezolve sistemul în mulțimea numerelor reale.
	2. Pe mulțimea numerelor întregi se consideră legile de compoziție $x * y = px + y + 2$, cu $p \in \mathbb{Z}$, $x \circ y = x + y - 2$ și funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 3x + q$, cu $q \in \mathbb{Z}$.
5p	a) Să se determine numărul real p astfel încât legea de compoziție "*" să fie comutativă.
5p	b) Pentru $p = 1$ să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $(x * x) \circ (x * x) = x^2 + 2$.
5p	c) Pentru $p = 1$ să se determine numărul întreg q astfel încât funcția f să fie morfism între grupurile $(\mathbb{Z}, *)$ și $(\mathbb{Z}, \circ)$.
	SUBIECTUL III (30p)
	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
5p	a) Să se calculeze $f'(1)$.
5p	b) Să se determine intervalele de convexitate și intervalele de concavitate ale funcției f .
5p	c) Să se arate că $f(x) \leq 3$, pentru orice $x \leq 2$.
	2. Se consideră funcțiile $f, F: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ și $F(x) = x + \frac{1}{x}$.
5p	a) Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f .
5p	b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$.
5p	c) Să se calculeze $\int_1^e F(x) \cdot \ln x \, dx$.

VARIANTA 89

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze suma $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^6$.
- 5p 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $(x^2 - 1)(x + 1) \geq 0$.
- 5p 3. Să se arate că produsul soluțiilor reale ale ecuației $mx^2 - 2009x - m = 0$ este constant, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}^*$.
- 5p 4. Să se rezolve ecuația $C_n^0 + C_n^1 = 8$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p 5. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctul O , intersecția diagonalelor. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DC}$.
- 5p 6. Să se calculeze $\lg(\operatorname{tg} 40^\circ) \cdot \lg(\operatorname{tg} 41^\circ) \cdot \dots \cdot \lg(\operatorname{tg} 45^\circ)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pentru $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se notează $X^3 = X \cdot X \cdot X$.

- 5p a) Să se determine A^{-1} .
- 5p b) Să se rezolve ecuația matricială $A^3 \cdot X = I_3$, unde $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- 5p c) Să se calculeze $(B - A)^3$.
2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x * y = 3xy + 7x + 7y + 14$.
- 5p a) Să se determine elementul neutru al legii $*$.
- 5p b) Să se rezolve mulțimea numerelor întregi inecuația $x * x \leq -1$.
- 5p c) Să se demonstreze că legea de compoziție $*$ este asociativă.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

- 5p a) Să se calculeze $f'(1)$.
- 5p b) Să se determine intervalele de concavitate și intervalele de convexitate ale funcției f .
- 5p c) Să se arate că $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \geq -\frac{1}{2}$.

2. Se consideră funcțiile $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ și $g(x) = e^{1-x}$.

- 5p a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției f .
- 5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x \cdot f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.
- 5p c) Să se arate că $\int_0^{\frac{1}{2}} (g(x) - f(x)) dx \geq 0$.

VARIANTA 90

	SUBIECTUL I (30p)
5p	1. Să se calculeze suma $S = 1 + 5 + 9 + \dots + 25$.
5p	2. Să se determine mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + x - 2 < 0\}$.
5p	3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1} \cdot 2^x = 108$.
5p	4. Să se determine câte numere de trei cifre se pot scrie folosind doar elemente din mulțimea $\{1, 2\}$.
5p	5. Fie punctele distincte A, B, C, D , nu toate coliniare. Știind că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$, să se demonstreze că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.
5p	6. Să se calculeze $\sin A$ în triunghiul ABC , știind că $BC = 10$, iar lungimea razei cercului circumscris triunghiului este egală cu 10.
	SUBIECTUL II (30p)
	1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2y + 4z = 0 \\ a^2x + 4y + 16z = 0 \end{cases}$, cu $a \in \mathbb{R}$ și matricea sistemului $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 4 \\ a^2 & 4 & 16 \end{pmatrix}$.
5p	a) Pentru $a = 1$ să se calculeze determinantul matricei A .
5p	b) Să se determine mulțimea valorilor reale ale numărului a pentru care $\det(A) \neq 0$.
5p	c) Să se rezolve sistemul pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{2; 4\}$.
	2. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$.
5p	a) Să se determine numărul real c știind că $f(1) + f(-1) = 2009$.
5p	b) Să se determine numerele reale a, b, c știind că $f(0) = f(1) = -2$ și că una dintre rădăcinile polinomului este $x = 2$.
5p	c) Pentru $a = -2$, $b = 1$ și $c = -2$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f .
	SUBIECTUL III (30p)
	1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$.
5p	a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$, pentru orice $x > 0$.
5p	b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1; 2)$.
5p	c) Să se arate că $2\sqrt{x} \geq 2 + \ln x$, pentru orice $x > 0$.
	2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + (1-x)^n$.
5p	a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției f_2 .
5p	b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x \cdot f_2(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.
5p	c) Să se arate că $\int_0^1 f_n(x) dx \geq \int_0^1 f_{n+1}(x) dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

VARIANTA 91

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine numărul elementelor mulțimii $A = \{1, 4, 7, \dots, 40\}$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$. Să se calculeze $f(-3) \cdot f(-2) \cdot \dots \cdot f(3)$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 \sqrt[3]{x} = 1$.
- 5p 4. Să se determine câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu ajutorul cifrelor din mulțimea $\{1, 2, 3\}$.
- 5p 5. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, știind că punctele $A(a, b)$ și $B(a-1, 4)$ aparțin dreptei de ecuație $x + y - 5 = 0$.
- 5p 6. Să se calculeze produsul $(\cos 1^\circ - \cos 9^\circ) \cdot (\cos 2^\circ - \cos 8^\circ) \cdot \dots \cdot (\cos 9^\circ - \cos 1^\circ)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Pentru $a \in \mathbb{R}$ fixat, definim matricea $B = aA + I_3$.

- 5p a) Să se calculeze A^2 , unde $A^2 = A \cdot A$.
- 5p b) Să se demonstreze că $2B - B^2 = I_3$.
- 5p c) Să se determine B^{-1} .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție prin $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$.
- 5p a) Să se verifice că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se determine numărul real x pentru care $(x^2 - 5) \circ 6 = -1$.
- 5p c) Să se determine două numere $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, astfel încât $a \circ b \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x - \ln x$.

- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0, +\infty)$.
- 5p c) Să se arate că $f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x > 0$.
2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (2-x)^n$.
- 5p a) Să se determine $\int_1^2 f_1(x) dx$, unde $x \in [0, 2]$.
- 5p b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f_1(x) \cdot e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=2$.
- 5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f_5 .

VARIANTA 92

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze produsul primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, care are primul termen $\sqrt{2}$ și rația egală cu $-\sqrt{2}$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$, $g(x) = 2x - 1$. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) + 2g(x) = -1$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$.
- 5p 4. Să se calculeze $3! - C_4^2$.
- 5p 5. Să se calculeze distanța de la punctul $A(-6, 8)$ la originea reperului cartezian xOy .
- 5p 6. Să se demonstreze că, dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A , atunci are loc relația $\sin B + \cos B = \frac{AB + AC}{BC}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$.
- 5p a) Să se calculeze $\det(A)$.
- 5p b) Să se demonstreze că $A^2X = XA^2$, oricare ar fi $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, unde $A^2 = A \cdot A$.
- 5p c) Să se arate că dacă $a, b \in \mathbb{R}$, atunci matricea $aI_3 + bA \in G$.
2. Se consideră polinomul $f = (1 + X + X^2)^{1004} + X^{2009}$, cu forma algebrică $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{2009}X^{2009}$.
- 5p a) Să se calculeze $f(-1)$.
- 5p b) Să se arate că $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2009}$ este un număr întreg par.
- 5p c) Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 - 1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x}$.
- 5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.
- 5p b) Să se determine asimptota verticală la graficul funcției f .
- 5p c) Să se demonstreze că $e^x \geq ex$, pentru orice $x > 0$.
2. Fie funcția $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{2}{x}$.
- 5p a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției f .
- 5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f .
- 5p c) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) \cdot \ln x \, dx$.

VARIANTA 93

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2$. Să se calculeze produsul $f(-2) \cdot f(-1) \cdot f(0) \cdot f(1) \cdot f(2)$.
- 5p 2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât minimul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + mx + 2$ să fie egal cu -2 .
- 5p 3. Să se rezolve ecuația $2^{\log_2 x} = 4$.
- 5p 4. Să se rezolve ecuația $C_{n+2}^1 + \frac{(n+2)!}{(n+1)!} = n^2 + 5, n \in \mathbb{N}$.
- 5p 5. Știind că punctele B și C sunt simetricele punctului $A(2,3)$ față de axele Ox , respectiv Oy , să se calculeze lungimea segmentului BC .
- 5p 6. Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC , știind că $\sin A = \frac{1}{2}$ și că lungimea razei cercului circumscris triunghiului este egală cu 4.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se calculeze $\det(A^2)$, unde $A^2 = A \cdot A$.
- 5p b) Să se demonstreze că $A^3 = 2^3 \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$, unde $A^3 = A^2 \cdot A$.
- 5p c) Să se demonstreze că matricea A verifică egalitatea $A^2 - 8A + 12I_2 = O_2$.
2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{Z}_6[X], f = X^3 + (\hat{2}a + \hat{1})X + a + \hat{4}$
- 5p a) Să se demonstreze că $b^3 = b$, oricare ar fi $b \in \mathbb{Z}_6$.
- 5p b) Să se determine $a \in \mathbb{Z}_6$, știind că $f(\hat{2}) = \hat{0}$.
- 5p c) Pentru $a = \hat{2}$ să se rezolve ecuația $f(x) = \hat{0}, x \in \mathbb{Z}_6$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + 1)e^x - 1$.
- 5p a) Să se verifice că $f'(x) = (x+1)^2 \cdot e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $O(0;0)$.
- 5p c) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .
2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{x+1}}$.
- 5p a) Să se determine $\int f_1(x) \cdot \sqrt{x+1} dx$.
- 5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f_1 .
- 5p c) Folosind, eventual, faptul că $\sqrt{x+1} \geq 1$, oricare ar fi $x \in [0;1]$, să se arate că $\int_0^1 f_{2009}(x) \leq \frac{1}{2010}$.

VARIANTA 94

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Se consideră numărul $a = \log_2 3$. Să se arate că $\log_2 18 = 2a + 1$.
- 5p 2. Să se determine funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, cu a și b numere reale, pentru care $f(1) + f(2) + f(3) = 6a + 2b$ și $f(4) = 8$.
- 5p 3. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție cu axele de coordonate a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^{x+3} - 2$.
- 5p 4. Prețul unui produs este de 5400 lei. Cu ce procent trebuie ieftinit prețul produsului pentru ca acesta să coste 4860 lei?
- 5p 5. Se consideră dreptele distincte $d_1: ax + 2y = 2$ și $d_2: 8x + ay = 4$. Să se determine valorile parametrului real a astfel încât dreptele d_1 și d_2 să fie paralele.
- 5p 6. Să se calculeze lungimea medianei duse din vârful A al triunghiului ABC știind că $A(2,3), B(2,0)$ și $C(0,2)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A_x = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, x real și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se notează $A_x^2 = A_x \cdot A_x$.
- 5p a) Să se determine valorile reale ale numărului x pentru care $\det(A_x) = 0$.
- 5p b) Să se determine numărul real x astfel încât $A_x^2 = I_2$.
- 5p c) Să se demonstreze că $A_x^2 = 2xA_x + (1 - x^2) \cdot I_2$.
2. Se consideră inelul de polinoame $\mathbb{Z}_3[X]$.
- 5p a) Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_3$, știind că polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X], f = X^2 + aX + b$ are rădăcinile $\hat{1}$ și $\hat{2}$.
- 5p b) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{Z}_3[X], f = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{1}$ la polinomul $g \in \mathbb{Z}_3[X], g = X + \hat{1}$.
- 5p c) Să se demonstreze că dacă $f \in \mathbb{Z}_3[X], f = (a^3 + \hat{2}a)X^2 + \hat{2}aX + \hat{1}$, atunci $f(\hat{1}) = \hat{2}a + \hat{1}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot e^x$.
- 5p a) Să se verifice că $f'(x) = (x+1) \cdot e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se determine intervalele de convexitate și intervalele de concavitate ale funcției f .
- 5p c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficul funcției f .
2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^n + x + 2}{x+1}$.
- 5p a) Să se determine $\int x \cdot f_1(x) dx$.
- 5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f_2(x) dx$.
- 5p c) Să se arate că aria suprafeței plane, cuprinse între graficul funcției f_{2008} și axa Ox și dreptele $x=0$ și $x=1$, este mai mică sau egală cu 2.

VARIANTA 95

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se demonstreze că $(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2$ este un număr natural.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Să se demonstreze că $f(x) \geq -1$, oricare ar fi numărul real x .
- 5p 3. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2x + 2y = 16 \\ xy = 12 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p 4. Să se rezolve ecuația $\frac{n!}{12} = (n-2)!$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- 5p 5. Se consideră reperul cartezian xOy și punctele $A(1, -1)$ și $B(3, 5)$. Să se determine coordonatele punctului C din plan astfel încât $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$.
- 5p 6. Să se calculeze $\cos A$ în triunghiul ABC , știind că $AB = 2$, $BC = 3$ și $AC = 4$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $M_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ și $C = A + B$.
- Se notează cu $X^2 = X \cdot X$
- 5p a) Să se efectueze produsul $A \cdot B$.
- 5p b) Să se calculeze $\det(A) \cdot \det(B)$.
- 5p c) Să se demonstreze că $A^2 - B^2 = 6(A + B)$.
2. Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x * y = x + y + 2$ și $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$.
- 5p a) Să se demonstreze că $x \circ y = (x + 2)(y + 2) - 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$.
- 5p b) Să se determine simetricul elementului $x = -3$ în raport cu legea de compoziție " $\circ$ ".
- 5p c) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x^2 * y^2 = 7 \\ x^2 \circ y^2 = 16 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.
- 5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, pentru orice $x > 1$.
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Să se arate că $f(\sqrt[3]{2}) \geq f(\sqrt[3]{3})$.
2. Se consideră funcțiile $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$ și $g(x) = \sqrt{1 - x}$.
- 5p a) Să se determine $\int f(x) dx$.
- 5p b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.
- 5p c) Să se calculeze $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) \cdot \ln x dx$.

VARIANTA 96

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine numărul real x știind că numerele $x-1$, $2x-2$ și $x+3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p 2. Să se determine numărul real m astfel încât soluțiile ecuației $x^2 - mx - 1 = 0$ să fie numere reale opuse.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{x-2}$.
- 5p 4. Să se calculeze $C_{10}^9 - C_9^8$.
- 5p 5. Să se determine numărul real m pentru care punctele $A(2,4)$, $B(3,3)$ și $C(m,5)$ sunt coliniare.
- 5p 6. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC , cu $m(\angle A) = 90^\circ$ și $\cos B = \frac{3}{5}$. Să se calculeze $\sin C$.

SUBIECTUL II (30p)

- 5p 1. a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \sqrt{2009}-1 & -1 \\ 1 & \sqrt{2009}+1 \end{vmatrix}$.
- 5p b) Să se calculeze valoarea determinantului $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{vmatrix}$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 4x + 2 = 0$.
- 5p c) Fie matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că $A^3 + A^2 + A = O_3$, unde $A^2 = A \cdot A$ și $A^3 = A^2 \cdot A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = 2xy - 8x - 8y + 36$.
- 5p a) Să se demonstreze că $x \circ y = 2(x-4)(y-4) + 4$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = 36$.
- 5p c) Știind că operația „ $\circ$ ” este asociativă, să se calculeze $\sqrt{1} \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \dots \circ \sqrt{2009}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
- 5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.
- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Să se arate că $f(2008) \geq f(2009)$.
2. Se consideră funcția $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.
- 5p a) Să se determine $\int f(x) dx$.
- 5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f^2(x)}{x^2 + 1}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.
- 5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = e^{\frac{x}{2}} \cdot f(x)$, unde $x \in [0,1]$.

VARIANTA 97

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine numărul real x știind că numerele $x-1$, $x+1$ și $2x+5$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p 2. Să se determine parametrul real m astfel încât soluțiile reale ale ecuației $x^2 - 3x + m = 0$ să fie inverse una altele.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg^2 x - 4\lg x + 3 = 0$.
- 5p 4. După o reducere a prețului cu 15 % un produs costă 680 lei. Să se calculeze prețul inițial al produsului.
- 5p 5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care distanța dintre punctele $A(2, m)$ și $B(-m, -2)$ este egală cu $4\sqrt{2}$.
- 5p 6. Știind că triunghiul ABC are $BC = 10$, $AC = 5$ și $AB = 5\sqrt{3}$, să se calculeze $\cos A$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X^n \mid n \in \{1, 2, 3\}\}$, unde

$$X^n = \underbrace{X \cdot X \cdot \dots \cdot X}_{\text{de } n \text{ ori}}, n \in \mathbb{N}^*.$$

- 5p a) Să se verifice că $X^3 = I_3$.
- 5p b) Să se calculeze $\det(I_3 + X + X^2)$.
- 5p c) Să se demonstreze că, dacă $Y \in G$, atunci $Y^{-1} \in G$.
2. Se consideră mulțimea $G = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1\}$.
- 5p a) Să se verifice că $2 + \sqrt{3} \in G$.
- 5p b) Să se arate că, în raport cu înmulțirea numerelor reale, orice element din mulțimea G are invers în G .
- 5p c) Să se demonstreze că $x \cdot y \in G$, pentru orice $x, y \in G$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

- 5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

- 5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .

- 5p c) Să se arate că $f(\sqrt[3]{2009}) \leq f(\sqrt[3]{2010})$.

2. Fie funcția $f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

- 5p a) Să se determine $\int f'(x) dx$.

- 5p b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

- 5p c) Să se arate că $\int_1^e e^x f(x) dx \leq e^e - e$.

VARIANTA 98

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se arate că $\log_3 24 = 1 + 3a$, unde $a = \log_3 2$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $g(x) = bx + a$, unde a și b sunt numere reale. Să se arate că dacă $f(-1) = g(-1)$, atunci $f = g$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-1} = \frac{1}{4}$.
- 5p 4. Să se determine numărul natural nenul n astfel încât numărul submulțimilor cu două elemente ale unei mulțimi cu n elemente să fie egal cu 6.
- 5p 5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3, 0)$ și intersectează axa Oy în punctul de ordonată 4.
- 5p 6. Să se determine lungimea înălțimii duse din vârful O al triunghiului MON , unde $M(4, 0)$, $N(0, 3)$ și $O(0, 0)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se notează $X^2 = X \cdot X$.
- 5p a) Să se calculeze AB .
- 5p b) Să se demonstreze că $(A+B)^2 = (A-B)^2 = A^2 + B^2$.
- 5p c) Să se calculeze inversa matricei $(A-B)^2$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3xy + 3x + 3y + 2$.
- 5p a) Să se demonstreze că $x * y = 3(x+1)(y+1) - 1$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se determine numerele reale pentru care $(x^2 - 2) * 5 = -1$.
- 5p c) Știind că legea de compoziție este asociativă, să se calculeze $(-2009) * (-2008) * \dots * (-1) * 0 * 1 * \dots * 2008 * 2009$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.
- 5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, pentru orice $x > 1$.
- 5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(2; e^2)$.
- 5p c) Să se demonstreze că $f(x) \geq e^2$, pentru orice $x > 1$.
2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^n + 4x}$.
- 5p a) Să se verifice că $\int_1^4 f_1(x) dx = \frac{14\sqrt{5}}{3}$.
- 5p b) Să se calculeze $\int_1^4 \frac{x+2}{f_2^2(x)} dx$.
- 5p c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f_2(x)}$.

VARIANTA 99

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se determine mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 \geq 3x - 1\}$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x$. Să se calculeze $f(1) + f(4) - f(2)$.
- 5p 3. Să se determine $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încât soluțiile reale ale ecuației $x^2 - 3x + m = 0$ să aibă semne opuse.
- 5p 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element n din mulțimea $\{2, 3, 4, 5\}$, acesta să verifice egalitatea $2^n = n^2$.
- 5p 5. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât punctele $A(1, 3)$, $B(2, 5)$ și $C(3, m)$ să fie coliniare.
- 5p 6. Să se determine coordonatele punctului B știind că punctul $C(3, 5)$ este mijlocul segmentului AB , unde $A(2, 4)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ cu $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Să se determine numărul real x astfel încât $A \cdot B = B \cdot A$.
- 5p b) Să se verifice că $A^2 = 4(A - I_2)$, unde $A^2 = A \cdot A$.
- 5p c) Să se determine numărul real a astfel încât $A^3 - aA^2 + 4A = O_2$, unde $A^3 = A \cdot A \cdot A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale definim legile de compoziție $x \circ y = x + y + 3$ și $x * y = xy - 3(x + y) + 12$.
- 5p a) Să se verifice că $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $(x \circ (x + 1)) + (x * (x + 1)) = 11$.
- 5p c) Să se rezolve sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x \circ (y - 1) = 0 \\ (x + 1) * y = x * (y + 1) \end{cases}, \text{ cu } x, y \in \mathbb{R}.$$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 2 - 3\sqrt[3]{x}$.
- 5p a) Să se verifice că $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x > 0$.
- 5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1; 0)$.
- 5p c) Să se arate că $\frac{x+2}{3} \geq \sqrt[3]{x}$, pentru orice $x > 0$.
2. Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{x+1}$.
- 5p a) Să se calculeze $\int_0^1 (x+1) \cdot f(x) dx$.
- 5p b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.
- 5p c) Folosind faptul că $1 \leq (x+1)^2 \leq 4$ pentru orice $x \in [0, 1]$, să se arate că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f , este un număr din intervalul $\left[\frac{\pi}{28}, \frac{\pi}{7}\right]$.

VARIANTA 100

	SUBIECTUL I (30p)
5p	1. Să se determine produsul primilor trei termeni ai unei progresii geometrice știind că primul termen este egal cu 1 și rația este egală cu -2 .
5p	2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + \log_3 x$. Să se calculeze $f(1) + f(3)$.
5p	3. Să se determine coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$.
5p	4. Să se calculeze $C_5^0 + C_5^1 - 2A_5^1$.
5p	5. În reperul cartezian xOy , se consideră punctele $A(3,2)$, $B(2,3)$ și M mijlocul segmentului AB . Să se determine lungimea segmentului OM .
5p	6. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC , știind că $BC = 4$ și măsura unghiului A este de 30° .
	SUBIECTUL II (30p)
	1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_2 + aA$, unde $a \in \mathbb{R}$.
5p	a) Să se demonstreze că $A^2 = 8A$, unde $A^2 = A \cdot A$.
5p	b) Să se calculeze $\det X(a)$.
5p	c) Să se demonstreze că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 8ab)$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.
	2. Se consideră polinomul $f = (1 + X + X^3)^{670} - X^{2010} \in \mathbb{Z}[X]$ cu forma algebrică $f = a_{2009}X^{2009} + \dots + a_1X + a_0$.
5p	a) Să se calculeze $f(1) + f(-1)$.
5p	b) Să se arate că suma $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2009}$ este un număr par.
5p	c) Să se determine restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 1$.
	SUBIECTUL III (30p)
	1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.
5p	a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.
5p	b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f .
5p	c) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0, +\infty)$.
	2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x^{n+1} + 1) \cdot e^x$.
5p	a) Să se determine $\int f_0(x) \cdot e^{-x} dx$.
5p	b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1 , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.
5p	c) Să se arate că $\int_0^1 f_{2008}(x) dx + \int_0^1 f_{2010}(x) dx \geq 2 \int_0^1 f_{2009}(x) dx$.