

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE CLASA a IX-a

1. a) Dacă x, y, z reprezintă numărul de cutii de câte 6, 9, respectiv 20 bucăți trebuie să avem: $6x + 9y + 20z = 33$ 1p

Este necesar ca $z \in \{0, 1\}$ 2p

Din $z = 0 \Rightarrow 2x + 3y = 11 \Rightarrow (x, y) \in \{(1, 3); (4, 1)\}$ 1p

Din $z = 1 \Rightarrow 6x + 9y = 13$ (Fals).....1p

b) Dacă $6x + 9y + 20z = 43 \Rightarrow z \in \{0, 1, 2\}$ 1p

$$\left. \begin{array}{l} z = 0 \Rightarrow 6x + 9y = 43 \text{ (fals)} \\ \text{Din } z = 1 \Rightarrow 6x + 9y = 23 \text{ (fals)} \\ z = 2 \Rightarrow 2x + 3y = 1 \text{ (fals)} \end{array} \right\} \dots\dots\dots 1p$$

2. $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 5 \cdot (a_1 + a_{10})$ 1p

$a_{10} = \frac{18}{r} + 9r$ 1p

VARIANTA 1

$S = 5 \left(9r + \frac{36}{r} \right) = 45 \cdot \left(r + \frac{4}{r} \right)$ 2p

$S = 45 \cdot \left[\left(\frac{2}{\sqrt{r}} - \sqrt{r} \right)^2 + 4 \right]$ 1p

$S_{\min} = 180$, pentru $r = 2$ 1p

Rezultă: 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27.....1p

VARIANTA 2

$S = 45 \cdot \left(\frac{4}{r} + r \right) \geq 45 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{4}{r} \cdot r} = 180$ (inegalitatea mediilor).....1p

$S_{\min} = 180$ pentru $r = 2$ 1p

Rezultă: 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27.....1p

3. VARIANTA 1

Ridicăm la pătrat ecuațiile sistemului, apoi le adunăm membru cu membru și obținem: $x^2 + y^2 + z^2 - 4 \cdot (xy + yz + zx) + 4 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = 1$ 3p

Avem $5 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) - 4 \cdot (xy + yz + zx) = 1 (*)$

Dar : $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx (**)$ 2p

NOTĂ

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ - 13 martie 2010

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Din (*) și (**) $\Rightarrow$

$$5 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = 1 + 4 \cdot (xy + yz + zx) \leq 1 + 4(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \dots\dots\dots 2p$$

VARIANTA 2

$$\begin{cases} x - 2y = a \\ y - 2z = b \cdot 2 \\ z - 2x = c \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{7}(a + 2b + 4c) \dots\dots\dots 1p$$

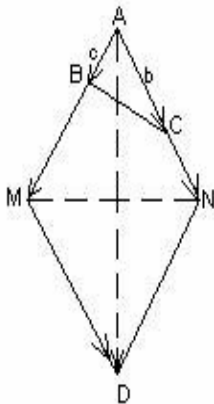
$$\begin{cases} x - 2y = a \cdot 4 \\ y - 2z = b \\ z - 2x = c \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{7} \cdot (4a + b + 2c) \dots\dots\dots 1p$$

$$\begin{cases} x - 2y = a \cdot 2 \\ y - 2z = b \cdot 4 \\ z - 2x = c \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{1}{7} \cdot (2a + 4b + c) \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{49} \cdot [21 + 28 \cdot (ab + bc + ca)] \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Cum: } ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \dots\dots\dots 2p$$

4.



a) $|\overrightarrow{AM}| = b \cdot |\overrightarrow{AB}| = bc$; $|\overrightarrow{AN}| = c \cdot |\overrightarrow{AC}| = bc \dots\dots\dots 2p$

b) $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} = -b \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC} = c \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} \dots\dots\dots 2p$

$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AN} \Rightarrow (MD) \equiv (AN)$ și $MD \parallel AN$,
 de unde AMDN paralelogram. 1p

c) AMDN paralelogram și $(AM) \equiv (AN) \Rightarrow AMDN$ este romb. 1p

Rezultă (AD) bisectoarea $\widehat{BAC}$ 1p

NOTĂ

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.