# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
## *"ADOLF HAIMOVICI"*
## ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecția mediului**

### BAREM DE CORECTARE CLASA a IX-a

**1.** Pe un bulevard sunt 100 de felinare, numerotate 1, 2, ..., 100. Inițial, pentru decor, felinarele 1, 4, 7, ..., 97, 100 sunt cu lumină galbenă iar restul cu lumină albă. Cu ocazia sărbătorilor de iarnă, începând de la felinarul 100 şi în sens descrescător din doi în doi, la fiecare felinar întâlnit se adaugă un filtru albastru. Astfel, datorită proprietății culorilor derivate, o parte din felinare rămân cu lumină albă, o parte rămân cu lumină galbenă, o parte devin cu lumină albastră (alb + albastru = albastru) iar o parte devin cu lumină verde (galben + albastru = verde). Aflați câte din cele 100 de felinare vor fi din fiecare culoare.

**<u>Soluție:</u>**

Inițial sunt galbene felinarele cu numerele de ordine 1, 4, 7, ..., 97, 100, adică cele cu numerele de forma $3k+1$, cu $k \in \{0;1;2;...;33\}$, în număr total de 34 felinare ................................................ **1p**

Filtrul albastru se aplică felinarelor 100, 98, 96, ..., 4, 2, deci la toate cu numărul de ordine par, în număr total de 50 felinare ................................................................................................ **1p**

Dintre felinarele inițial galbene au număr de ordine par cele cu numărul de ordine $3k+1$ şi care au $k$ impar, adică cele cu $k \in \{1;3;5;7;...;33\}$, în număr total de 17 felinare .................................... **1p**

Deci <u>exact **17 felinare** - care inițial au fost galbene - vor deveni **verzi**</u> ........................................ **1p**

Cum $34-17=17$, restul de <u>**17 felinare** rămân **galbene**</u> ............................................................ **1p**

Cum $50-17=33$, restul de <u>**33 felinare** vor deveni **albastre**</u> ...................................................... **1p**

Cum $100-(17+17+33)=33$, restul de <u>**33 felinare** rămân **cu lumină albă**</u> ................................ **1p**

**2.** O sală de spectacol are locurile dispuse pe rânduri şi pe fiecare rând, începând cu al doilea, se află cu câte două locuri mai multe decât pe rândul precedent. Ştiind că pe primul rând sunt 38 de locuri, şi în total sala are 2010 locuri, aflați pe câte rânduri sunt dispuse locurile în acea sală.

**<u>Soluție</u>**

Fie $a_1$ numărul de locuri de pe primul rând, $a_2$ numărul de locuri de pe al doilea rând şi aşa mai departe .................................................................................................................................... **1p**

Conform cu cele descrise vom avea $a_1=38$, $a_2=40$, $a_3=42$, etc. ............................................ **1p**

Deci $a_1, a_2, a_3, ...$ sunt în progresie aritmetică cu primul termen $a_1=38$ şi rația $r=2$ ................. **1p**

Fie $n \in \mathbb{N}$ numărul rândurilor sălii şi conform enunțului $a_1+a_2+a_3+...+a_n=2010$, ceea ce înseamnă $\frac{n(a_1+a_n)}{2}=2010$ ........................................................................................ **1p**

cu $a_1=38$ şi $a_n=a_1+(n-1)\cdot r=2n+36$ .......................................................................................... **1p**

Se obține ecuația $n^2+37n-2010=0$ .......................................................................................... **1p**

ecuație care are soluția naturală $n=30$, deci **sala are 30 de rânduri** .......................................... **1p**

**3.** Pentru fiecare $a \in \mathbb{R}$ se consideră ecuația $x^2 - 2x + (2011 - a) = 0$, notată $E(a)$.

a) Determinați valorile $a \in \mathbb{R}$ pentru care $E(a)$ are rădăcini reale;

b) Determinați suma şi produsul rădăcinilor ecuației $E(a)$;

c) Determinați valorile $a \in \mathbb{R}$ pentru care $E(a)$ are ambele rădăcini numere naturale.

d) Determinați valorile $a \in \mathbb{R}$ pentru care $E(a)$ are ambele rădăcini numere raționale.

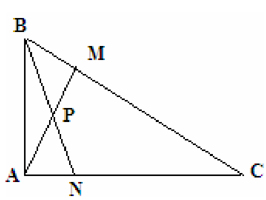
**Soluție:**

a) $E(a) \Leftrightarrow (x-1)^2 = a - 2010$, deci $E(a)$ are rădăcini reale $\Leftrightarrow a \geq 2010$,
sau rezolvare prin condiția $\Delta \geq 0$ .......... **1p**
b) $x_1 + x_2 = 2$ .......... **1p**
şi $x_1 \cdot x_2 = 2011 - a$ .......... **1p**
c) Din $x_1 + x_2 = 2$ şi $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ se obține $(x_1; x_2) = (0; 2)$, în cazul $a = 2011$ .......... **1p**
şi $(x_1; x_2) = (1; 1)$, în cazul $a = 2010$ .......... **1p**
d) Din $(x-1)^2 = a - 2010 = k^2$, $k \in \mathbb{Q}$, .......... **1p**
rezultă $a = k^2 + 2010$, $k \in \mathbb{Q}$ .......... **1p**

**4.** O foaie de tablă este de forma unui triunghi $ABC$ dreptunghic în $A$ şi cu $m(\sphericalangle ACB) = 36^0$. Se trasează pe foaie segmentele $[AM]$, cu $M \in (BC)$ încât $CM = AC$ şi apoi $[BN]$ cu $N \in (AC)$ încât $AN = BM$. Să se demonstreze că:
a) dacă se notează $AM \cap BN = \{P\}$, punctul $P$ este mijlocul segmentului $[BN]$;
b) dacă se taie foaia după segmentele $[AM]$ şi $[BN]$, se obțin trei triunghiuri isoscele.

**Soluție:**

Conform cu figura, din aplicarea teoremei lui Menelaus, avem $\dfrac{BP \cdot AN \cdot CM}{PN \cdot AC \cdot MB} = 1$, pentru $\Delta BNC$ şi punctele coliniare A, P, M .......... **1p**
Se obține $BP = PN$ .......... **1p**
Deoarece $AP$ este mediană în triunghi dreptunghic, este jumătate din ipotenuză .......... **1p**




Astfel triunghiurile $PAB$ şi $PAN$ sunt isoscele. .......... **1p**
Din triunghiul isoscel $CAM \Rightarrow m(\widehat{CAM}) = m(\widehat{CMA}) = 72^0$ .......... **1p**
Obținem $m(\widehat{BMP}) = 108^0, m(\widehat{ABC}) = 54^0, m(\widehat{BAP}) = m(\widehat{ABP}) = 18^0$ ..... **1p**
$m(\sphericalangle MBP) = 36^0 = m(\sphericalangle MPB)$ (unghi exterior $\Delta PAB$) .......... **1p**

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
## *"ADOLF HAIMOVICI"*
## ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecția mediului**

**BAREM DE CORECTARE CLASA a X-a**

**1.** Rezolvați ecuațiile :

a) $\log_3(x+3)\cdot\log_{x-3}3=2$, $x\in\mathbb{R}$

b) $4^x-9^x=10^x-15^x$, $x\in\mathbb{R}$

**Soluție:**

a) Condiții necesare: $x+3>0$, $x-3>0$ şi $x-3\neq1$ ........................................................ **1p**

$\log_3(x+3)\cdot\log_{x-3}3=2 \Leftrightarrow \log_3(x+3)\cdot\dfrac{1}{\log_3(x-3)}=2 \Leftrightarrow \log_3(x+3)=\log_3(x-3)^2$ .................. **1p**

$x+3=(x-3)^2 \Leftrightarrow x^2-7x+6=0$ cu $x_1=1$ (respinsă de $x-3>0$), $x_2=6$ soluție unică ............. **1p**

b) $4^x-9^x=10^x-15^x \Leftrightarrow (2^x-3^x)(2^x+3^x-5^x)=0$ ........................................................ **1p**

$2^x-3^x=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x=1 \Rightarrow$ Soluție $x=0$ ........................................................ **1p**

$2^x+3^x-5^x=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\right)^x+\left(\dfrac{3}{5}\right)^x=1$ ........................................................ **1p**

Soluție unică $x=1$, deoarece $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^x+\left(\dfrac{3}{5}\right)^x$ strict monotonă .......................... **1p**

**2.** Fie $\mathbb{C}$ mulțimea numerelor complexe, atunci:

a) Demonstrați că pentru orice $z\in\mathbb{C}$, dacă $\overline{z}=z$ atunci $z$ este număr real( $\overline{z}$ este conjugatul complex al numărului complex $z$);

b) Demonstrați că pentru orice două numere $z_1, z_2\in\mathbb{C}^*$, $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ şi $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

c) Demonstrați că pentru orice $z\in\mathbb{C}$, $z+\overline{z}$ şi $z\cdot\overline{z}$ sunt numere reale;

d) Dacă $z=\dfrac{2010+2011i}{2011+2010i}$ arătați că $z\cdot\overline{z}=1$ şi $\overline{z}(z^2+1)\in\mathbb{R}$

**Soluție:**

a) $z=a+ib$, $\overline{z}=a-ib$ şi atunci $\overline{z}=z \Leftrightarrow b=0 \Leftrightarrow z$ este număr real ........................................ **1p**

b) $\overline{z_1+z_2}=\overline{(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)}=\overline{(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)}=(a_1+a_2)-i(b_1+b_2)=(a_1-ib_1)+(a_2-ib_2)=$

$=\overline{a_1+ib_1}+\overline{a_2+ib_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ ........................................................................................... **1p**

$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{(a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2)}=...=(a_1a_2-b_1b_2)-i(a_1b_2+a_2b_1)$

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(a_1-ib_1)\cdot(a_2-ib_2)=...=(a_1a_2-b_1b_2)-i(a_1b_2+a_2b_1)$ ...................................................... **1p**

analog $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ ........................................................................................... **1p**

c) $\overline{(z+\overline{z})}=\overline{z}+\overline{\overline{z}}=\overline{z}+z=(z+\overline{z})$, deci $z+\overline{z}\in\mathbb{R}$ ........................................................................ **1p**

analog $z\cdot\overline{z}\in\mathbb{R}$ ........................................................................................... **1p**

d) se verifică $z\cdot\overline{z}=1$ şi atunci $\overline{z}(z^2+1)=\overline{z}\cdot z^2+\overline{z}=(\overline{z}\cdot z)\cdot z+\overline{z}=z+\overline{z}\in\mathbb{R}$ .............................. **1p**

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
## *"ADOLF HAIMOVICI"*
## ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecția mediului**

**3.** Într-o populație de şoricei 25% sunt albi iar restul sunt negri. Printre cei albi 50% sunt cu ochi albaştri iar dintre cei negri doar 20% au ochi albaştri. Dacă 99 de şoricei au ochi albaştri, aflați câți şoricei sunt în total.

**Soluție:**

Fie $x$ numărul total de şoricei ........................................................ **1p**

Atunci $25\%(x)=\frac{x}{4}$ sunt albi ........................................................ **1p**

şi $75\%(x)=\frac{3x}{4}$ sunt negri ........................................................ **1p**

dintre şoriceii albi $50\%\left(\frac{x}{4}\right)=\frac{x}{8}$ au ochi albaştri ........................................................ **1p**

dintre şoriceii negri $20\%\left(\frac{3x}{4}\right)=\frac{3x}{20}$ au ochi albaştri ........................................................ **1p**

$\frac{x}{8}+\frac{3x}{20}=99$ ........................................................ **1p**

$x=360$ ........................................................ **1p**

**4.** Un experiment de biochimie cercetează comportamentul unui mediu la o variație tipică de temperatură, pe durate de 10 secunde. Pe parcursul unei desfăşurări a experimentului un termostat reglează temperatura mediului cercetat în funcție de factorul *moment*, astfel ca la fiecare moment $t\in[0;10]$ temperatura mediului cercetat să fie $T(t)=\left[\sqrt{t^2-6t+81}\right]$ grade, în care $[m]$ înseamnă partea întreagă a numărului $m$ .(Spre exemplu $\left[\sqrt{76}\right]=8$ deoarece $\sqrt{76}\in[8;\,9)$ ).

a) Aflați temperatura mediului la momentul de început şi la momentul final al experimentului;
b) Aflați dacă pe parcursul experimentului se mai înregistrează măcar încă o dată temperatura de la momentul de început şi în caz afirmativ determinați un astfel de moment;
c) Demonstrați că termostatul nu permite scăderea temperaturii mediului sub valoarea de 8 grade;
d) Determinați temperatura maximă pe care o atinge mediul pe parcursul experienței;
e) Demonstrați că temperatura maximă este atinsă doar la un singur moment al experimentului.

**Soluție**

a) $T(0)=\left[\sqrt{81}\right]=9$ grade şi $T(10)=\left[\sqrt{121}\right]=11$ grade la final ........................................................ **1p**

b) $T(t)=\left[\sqrt{t(t-6)+81}\right]$; $T(0)=T(6)$, deci aceeaşi temperatură este la $t=6$ ........................................................ **1p**

c) $T(t)=\left[\sqrt{(t-3)^2+72}\right]\geq\left[\sqrt{72}\right]=8$ ........................................................ **1p**

d) $(t-3)^2$ are valoare maximă în $t=10$ ........................................................ **1p**

deci $T(10)=\left[\sqrt{121}\right]=11$ grade este temperatura maximă atinsă ........................................................ **1p**

e) Când $t\in[0;\,10)$ se obține $(t-3)^2<49$ ........................................................ **1p**

şi atunci $T(t)=\left[\sqrt{(t-3)^2+72}\right]<\left[\sqrt{121}\right]=11$, deci $T(t)\leq 10$ ........................................................ **1p**

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
## *"ADOLF HAIMOVICI"*
## ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecția mediului**

**BAREME DE CORECTARE CLASA a XI-a**

**1.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\2&1&0\end{pmatrix}$ şi $C(A)=\{X\in M_3(\mathbb{C})/\ A\cdot X=X\cdot A\}$

a) Calculați $A^2$ şi $A^3$;

b) Arătați că matricele din $C(A)$ sunt de forma $X=\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix}$;

b) Arătați că ecuația $X^3=O_3$ are o infinitate de soluții în $M_3(\mathbb{C})$;

c) Arătați că ecuația $X^3=A$ nu are soluții în $M_3(\mathbb{C})$.

**Soluție:**

a) $A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ şi $A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$ ........ **1p**

b) $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot X=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\2a+d&2b+e&2c+f\end{pmatrix}$ ........ **1p**

c) $X\cdot A=\begin{pmatrix}b+2c&c&0\\e+2f&f&0\\h+2i&i&0\end{pmatrix}$ şi prin identificare $X$ este de forma $X=\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix}$ ........ **1p**

$X=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&0&0\\b&c&0\end{pmatrix}$ sunt soluții........ **2p**

d) $X^4=A\cdot X=X\cdot A\Rightarrow X=\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix}\Rightarrow X^3=A\Rightarrow a^3=0$ şi $3a^2b=1$ (Fals) ........ **2p**

**2.** Determinați numerele reale $a$ şi $b$ încât $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+a}-b}{x^2+2x-3}=\dfrac{3}{16}$

**Soluție** :

$f(x)=\sqrt{x^2+x+a}-b$, $g(x)=x^2+2x-3\Rightarrow f(1)=\sqrt{a+2}-b$ ........ **1p**

$g(1)=0$ ........ **1p**

pentru ca limita să fie finită în mod necesar $\sqrt{a+2}-b=0$ ........ **1p**

$\Rightarrow a=b^2-2$ ........ **1p**

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+b^2-2}-b}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{(x^2+2x-3)\left(\sqrt{x^2+x+b^2-2}+b\right)}$ ........ **1p**

dar $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ şi $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$ ........ **1p** limita devine $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{(x+3)\left(\sqrt{x^2+x+b^2-2}+b\right)}=\dfrac{3}{16}\Rightarrow b=2,\ a=2$ ............................................... **1p**

**3.** Fie matricele de forma $A=\begin{pmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & 0 & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & 0\end{pmatrix}$, $A\in M_3(\mathbb{R})$.

a) Calculați $\det A$;

b) Arătați că există matrice $A$ de această formă, cu $\det A=0$ şi care are elementele nesituate pe diagonala principală egale cu $2011$ sau $-2011$;

c) Arătați că există matrice $A$ de această formă, cu $\det A=0$ şi care are elementele nesituate pe diagonala principală numere întregi nenule şi distincte două câte două.

d) La următorul joc se folosesc tablouri matriceale de forma din figură şi doi participanți completează pe rând cele şase căsuțe libere, scriind într-o căsuță liberă, câte un număr întreg nenul. $\begin{pmatrix}0 & \square & \square\\ \square & 0 & \square\\ \square & \square & 0\end{pmatrix}$

Câştigă cel care începe jocul dacă determinantul matricei obținută este diferit de zero, respectiv câştigă celălalt participant dacă determinantul este egal cu zero. Descoperiți o strategie prin care al doilea jucător să câştige jocul indiferent de cum joacă primul jucător.

<u>**Soluție**</u>:

a) $\det A=a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}$ ........................................................................................ **1p**

b) Spre exemplu $A=\begin{pmatrix}0 & 2011 & -2011\\ 2011 & 0 & 2011\\ 2011 & 2011 & 0\end{pmatrix}$ are $\det A=0$ ........................................................ **1p**

c) $a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}=0\Rightarrow a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}=-a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}$ ...................................................... **1p**

spre exemplu, pot alege $a_{12}=1$, $a_{23}=2$, $a_{31}=3$, $a_{21}=-1$, $a_{32}=-2$, $a_{13}=-3$ ............................ **1p**

şi $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}$ are $\det A=0$ ................................................................................ **1p**

d) O strategie care face să câştige al doilea jucător este ca matricea $A$ să aibă $a_{ij}=-a_{ji}$ ............. **1p**

Aşadar este suficient ca al doilea jucător să aleagă de fiecare dată, simetricul față de diagonala principală a numărului opus celui ales de primul jucător................................................................ **1p**

**4.** O piesă a unui angrenaj are forma unui patrulater ale cărui vârfuri într-un reper cartezian ortogonal sunt punctele $A(2;2)$, $B(9;1)$, $C(14;6)$ şi $D(1;5)$ iar unitatea de lungime în reper de $1\ cm$. Se cere:

a) Determinați coordonatele mijlocului $M$ al diagonalei $BD$;

b) Demonstrați că $M$ este chiar intersecția diagonalelor patrulaterului(A, M, C-coliniare);

c) Determinați aria patrulaterului;

d) Dacă trei dintre vârfurile patrulaterului sunt vârfurile unui paralelogram interior plăcii, aflați aria acestui paralelogram;

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
## *"ADOLF HAIMOVICI"*
## ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecția mediului**

**<u>Soluție</u>**:

Reprezintă în reperul cartezian punctele A, B, C, D ........................................................................ **1p**

a) Găseşte $M(5;\ 3)$ .................................................................................................................. **1p**

b) Verifică coliniaritatea punctelor A, M, C.......................................................................................... **1p**

c) Calculează aria unui triunghi format de trei dintre vârfurile patrulaterului

( $A_{ABC} = 20\ cm^2; A_{ADC} = 20\ cm^2; A_{ADB} = 10\ cm^2; A_{CDB} = 30\ cm^2$ ) ..................................................... **1p**

Calculează aria triunghiului rămas şi determină $A_p = 40\ cm^2$ ........................................................ **1p**

d) Determină al patrule vârf $P(8;4)$ .............................................................................................. **1p**

Apoi calculează aria acestui paralelogram ( $20\ cm^2$ ) ........................................................................**1p**

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
## *"ADOLF HAIMOVICI"*
## ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecția mediului**

**BAREM DE CORECTARE CLASA a XII-a**

**1.** Pe mulțimea numerelor reale, se defineşte legea de compoziție $x \circ y = 2011 \cdot (xy - x - y) + 2012$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $x \circ y = 2011 \cdot (x-1) \cdot (y-1) + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

b) Demonstrați că legea este asociativă şi că $x \circ y \circ z = 2011^2 \cdot (x-1) \cdot (y-1) \cdot (z-1) + 1, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$;

c) Demonstrați că mulțimea $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{R}$ față de legea „$\circ$” şi că $(G;\circ)$ este grup comutativ;

d) Rezolvați ecuația $x \circ x \circ x \circ x = 2011^7 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

**Soluție**:

a) Verifică $2011 \cdot (x-1) \cdot (y-1) + 1 = 2011 \cdot (xy - x - y) + 2012$ ...................................................... **1p**

b) Folosind eventual punctul a) se justifică imediat $x \circ y \circ z = 2011^2 \cdot (x-1) \cdot (y-1) \cdot (z-1) + 1$ ..... **1p**

c) Dacă $x \neq 1$ şi $y \neq 1$ atunci $x \circ y = 2011 \cdot (x-1) \cdot (y-1) + 1 \neq 1$, deci $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ este parte stabilă în mulțimea numerelor reale față de operația ”$\circ$”.............................................................................. **1p**

Folosind eventual punctul b) se arată că $(G;\circ)$ este structură comutativă şi asociativă ................. **1p**

cu element neutru $e = \dfrac{2012}{2011}$ ......................................................................................... **1p**

şi fiecare $x \in G$ este simetrizabil, cu simetricul $x' = \dfrac{1}{2011^2 (x-1)} + 1 \in G$ .................................... **1p**

d) Din subpunctele a) şi b) se deduce $x \circ y \circ z \circ t = 2011^3 \cdot (x-1) \cdot (y-1) \cdot (z-1) \cdot (t-1) + 1$

şi ecuația devine $2011^3 \cdot (x-1)^4 + 1 = 2011^7 + 1$, din care $(x-1)^4 = 2011^4$, deci $x - 1 = \pm 2011$

şi ecuația are mulțimea soluțiilor $S = \{-2010; 2012\}$ ........................................................................ **1p**

**2.** Demonstrați că:

a) $1 - x + x^2 - x^3 \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2$, oricare ar fi $x \in [0; 1]$;

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$ şi, folosind eventual a), deduceți că: $\dfrac{7}{12} \leq \ln 2 \leq \dfrac{5}{6}$ ;

c) $\dfrac{455}{528} \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^5} \leq \frac{61}{66}$.

**Soluție**:

a) $1 - x + x^2 - x^3 \leq \dfrac{1}{1+x} \Leftrightarrow -x^4 \leq 0$ ............................................................................................. **1p**

$\dfrac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2 \Leftrightarrow 0 \leq x^3$ ....................................................................................................... **1p**

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln 2$ ..................................................................................... **1p** din a) rezultă $\int_0^1 \left(1-x+x^2-x^3\right) dx \le \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \le \int_0^1 \left(1-x+x^2\right) dx$ ...................................................... **1p**

deci $\frac{7}{12} \le \ln 2 \le \frac{5}{6}$ ....................................................................................................................... **1p**

c) din a), înlocuind pe $x$ cu $x^5$ obținem $1-x^5+x^{10}-x^{15} \le \frac{1}{1+x^5} \le 1-x^5+x^{10}$ .............................. **1p**

Rezultă $1-\frac{1}{6}+\frac{1}{11}-\frac{1}{16} \le \int_0^1 \frac{dx}{1+x^5} \le 1-\frac{1}{6}+\frac{1}{11} \Leftrightarrow \frac{455}{528} \le \int_0^1 \frac{dx}{1+x^5} \le \frac{61}{66}$ ............................................ **1p**

**3.** Fie funcțiile $f$, $g$ şi $h$ definite prin: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{e^x}$; $g:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$ şi $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=\begin{cases} f(x), \text{ dacă } x\in(-\infty;1) \\ g(x), \text{ dacă } x\in[1;+\infty) \end{cases}$

a) Justificați că funcțiile $f$, $g$, $h$ sunt primitivabile şi calculați $\int f(x)\,dx$, $\int g(x)\,dx$, $\int h(x)\,dx$;

b) Justificați că funcția $h$ este integrabilă pe $[0;\,e]$ şi calculați $\int_0^e h(x)\,dx$.

<u>**Soluție**</u>:

a) Funcțiile $f$ şi $g$, fiind elementare, sunt continue pe domeniul lor, deci sunt primitivabile ...... **1p**

$\int f(x)\,dx = \int (x-1)e^{-x}\,dx$ şi se determină aplicând integrare prin părți $\left.\begin{matrix} u=x-1 \\ v'=e^{-x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} u'=1 \\ v=-e^{-x} \end{cases}$ şi

$\int f(x)\,dx = \int u\cdot v'\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx$ ............................................................................................ **1p**

$\Rightarrow \int f(x)\,dx = (1-x)\cdot e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = (1-x)\cdot e^{-x} - e^{-x} + C = -x\cdot e^{-x} + C = -\frac{x}{e^x} + C,\ C\in\mathbb{R}$ .......... **1p**

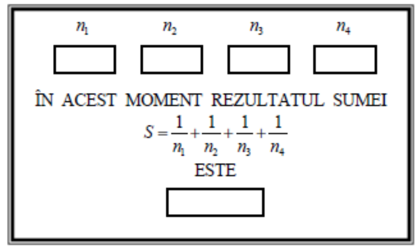
$\int g(x)\,dx = \int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \frac{\ln^3 x}{3} + C$, $C\in\mathbb{R}$ ............................................................................... **1p**

Funcția $h$ este primitivabilă deoarece $h_s(1)=h_d(1)=h(1)$ şi în rest $h$ este continuă, deci continuă pe $\mathbb{R}$ şi atunci $\int h(x)\,dx$ conține funcțiile $H(x)=\begin{cases} F(x)+C_1, \text{ dacă } x\in(-\infty;1) \\ G(x)+C_2, \text{ dacă } x\in[1;+\infty) \end{cases}$ unde $F(x)=-\frac{x}{e^x}$ şi $G(x)=\frac{\ln^3 x}{3}$ iar constantele $C_1$ şi $C_2$ sunt în condiția de derivabilitate pentru $H(x)$, adică $-\frac{1}{e}+C_1=C_2$; $H(x)=\begin{cases} -xe^{-x}+C, \text{ dacă } x\in(-\infty;1) \\ \frac{1}{3}\ln^3 x - \frac{1}{e} + C, \text{ dacă } x\in[1;+\infty) \end{cases}$ ........................................................... **1p**

b) Deoarece $h_s(1)=h_d(1)=h(1)$, şi în rest $h$ este continuă, $h$ este integrabilă pe $[0;\,e]$.............. **1p**

şi $\int_0^e h(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^e g(x)\,dx = \left.\left(-\frac{x}{e^x}\right)\right|_0^1 + \left.\left(\frac{\ln^3 x}{3}\right)\right|_1^e = \frac{1}{3}-\frac{1}{e}$ ................................................ **1p**

**4.** Un program de calculator, funcționează astfel:
La deschidere afişează pe ecranul monitorului 5 căsuțe ca în figura alăturată şi solicită utilizatorului să scrie în fiecare din căsuțele $n_1, n_2, n_3, n_4$ câte un număr real nenul.




După scrierea celor patru numere reale $n_1, n_2, n_3, n_4$ , în cea de a cincea căsuță programul afişează instantaneu rezultatul sumei $S=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}$. În continuare programul lucrează astfel:

La fiecare click succesiv din mouse în oricare două din căsuțele $n_1, n_2, n_3, n_4$, în care să zicem că apar două numere $a$ şi $b$, aceste numere sunt înlocuite automat cu numerele $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ şi $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$ , cu afişare în a cincea căsuță a noului rezultat al sumei $S$ ;
Se cere să se demonstreze că:
a) Dacă $a\cdot b\neq 0$ atunci $a+b+\sqrt{a^2+b^2}\neq 0$ şi $a+b-\sqrt{a^2+b^2}\neq 0$;
b) Dacă $a\cdot b\neq 0$ atunci $\frac{1}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$;
c) Dacă utilizatorul alege la pornire 4 numere şi pe monitor apare $S=2011$ atunci în orice moment al acelei aplicări a programului suma $S$ afişată pe monitor rămâne permanent 2011;
d) Dacă utilizatorul alege la pornire numerele 8044, 8045, 8046 şi 8047, atunci în orice moment al acelei aplicări a programului nici unul din cele patru numere afişate nu va deveni 2011.

**<u>Soluție</u>**:

a) $a+b+\sqrt{a^2+b^2}=0 \Leftrightarrow a+b=-\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow (a+b)^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow a\cdot b=0$ (fals) ...................... **1p**

Analog $a+b-\sqrt{a^2+b^2}=0 \Rightarrow a\cdot b=0$ (fals) ........................................................................ **1p**

b) $\frac{1}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2a+2b}{2ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ ............................................................ **1p**

c) Inițial suma inverselor numerelor din $M=\{n_1,n_2,n_3,n_4\}$ este $S=2011$. Dacă la un anume alt moment al aplicării programul afişează în căsuțele $n_1$, $n_2, n_3, n_4$ patru numere $a$, $b$, $c$, $d$ într-o ordine oarecare şi cu suma $S=2011$ şi dacă utilizatorul aplică click din mouse pe "$a$" şi "$b$" atunci, conform cu punctul b), suma $S$ rămâne tot 2011 ............................................................. **1p**

d) În condiția alegerii inițiale a numerelor 8044, 8045, 8046 şi 8047, în orice moment al utilizării programului pe ecran apare $S=\frac{1}{8044}+\frac{1}{8045}+\frac{1}{8046}+\frac{1}{8047}$ ....................................................... **1p**

$S<\frac{4}{8044}=\frac{1}{2011}$ ......................................................................................................... **1p**

deci nici unul din cele patru numere $n_1$, $n_2, n_3$, $n_4$, care rămân pozitive, nu poate ajunge să fie 2011 **1p**