

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

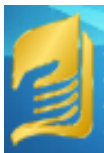
FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A IX-A

- În trei cutii notate A, B, C, sunt 100 de bile. Dacă numărul bilelor din cutia B diferă de numărul bilelor din cutia A cu 4, respectiv numărul bilelor din cutia C diferă de numărul bilelor din cutia A cu 3 și totodată numărul bilelor din fiecare cutie nu se divide la 3, să se afle câte bile sunt în fiecare cutie.
- Fie ABC un triunghi și punctele $D \in (BC)$ încât $BD = 2DC$, $E \in (AB)$ încât $AE = EB$, respectiv $F \in (CE)$ încât $CF = FE$. Se cere:
 - Arătați că $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;
 - Arătați că punctele A, F, D sunt coliniare și determinați valoarea raportului $\frac{AF}{FD}$.
- Se consideră mulțimea P a tuturor progresiilor aritmetice neconstante $(a_n)_{n \geq 1}$ care au $a_1 = 4$ și toți termenii numere naturale.
 - Arătați că toate progresiile din mulțimea P au rația număr natural nenul;
 - Determinați termenul general al acelei progresii din P în care $a_{20} \cdot a_{14}$ are cea mai mică valoare;
 - Aflați câte progresii din mulțimea P au ca termen numărul 2014.
- O ecuație de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$ o vom numi "perfectă" dacă a, b, c sunt numere reale nenule și oricum am schimba ordinea celor trei coeficienți a, b, c , toate ecuațiile astfel obținute au o soluție reală comună.
 - Arătați că ecuația $x^2 - 2014x + 2013 = 0$ este perfectă;
 - Arătați că ecuația $2013x^2 + 2014x + 1 = 0$ nu este perfectă;
 - Determinați ce condiție trebuie să verifice numerele $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ pentru ca ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ să fie perfectă.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

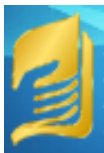
FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A X-A

1. Considerăm numărul complex $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.
 - a) Demonstrați că $z^2 - z + 1 = 0$ și $z^3 + 1 = 0$;
 - b) Arătați că $z^{2014} + z$ este număr real;
 - c) Arătați că $(1+z)(1-z^2)(1-z^{2014})(1+z^{2015})$ este număr natural pătrat perfect.
2. Sunt date 2013 greutateți marcate cu masele de 1g, 2g, ..., 2013g. Atunci:
 - a) Din greutatețile de 1g, 2g, ..., 9g formați trei grămăjoare de mase egale;
 - b) Justificați că din oricare 6 greutateți de mase m, m+1, m+2, m+3, m+4, m+5 se pot forma trei grămăjoare de mase egale;
 - c) Arătați că se pot forma cu cele 2013 greutateți trei grămezi de mase egale;
 - d) Dar dacă aveți 2014 greutateți marcate cu masele de 1g, 2g, ..., 2014g, puteți forma cu ele 3 grămezi cu masele egale? Justificați răspunsul.
3. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2013-x, & x \in \mathbb{Q} \\ 2014-x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
 - a) Calculați $f(2014) + f(2013 - \sqrt{2014})$;
 - b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $f(x) = 2014$;
 - c) Arătați că $(f \circ f)(x) = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$
 - d) Demonstrați că f este inversabilă și determinați inversa ei.
4. 4.1 Arătați că $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, pentru orice numere $a, b \in \mathbb{R}$.
4.2 Un melc se deplasează prin primul cadran al unui sistem de coordonate (xOy) , pe un grafic de ecuație $y = 2^{\frac{1}{\log_2 x}}$, cu $x \in (1; +\infty)$.
 - a) Arătați că $y > 1$ și $(\log_2 y) \cdot (\log_2 x) = 1$;
 - b) Arătați că $x \cdot y \geq 4$;
 - c) Determinați distanța minimă de la melc până la originea O a sistemului de coordonate.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

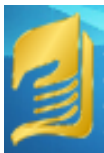
FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XI-A

1. Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
 - a) Arătați că C este inversabilă, după care calculați C^{-1} și verificați egalitatea $A = C^{-1} \cdot B \cdot C$;
 - b) Demonstrați că $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$;
 - c) Calculați A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq -2$. Determinați a și b încât $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + a} - b}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3}{16}$.
3. Fie $a > 0$, $b \in (0; 1)$ și funcția $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{pentru } x \in [0; b] \\ a \cdot x^4, & \text{pentru } x \in (b; 1] \end{cases}$
 - a) Arătați că f are limită în $x = b$ dacă și numai dacă $a \cdot b = 1$;
 - b) Calculați $L_1 = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$ și $L_2 = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$.
4. Fie $M_2(\mathbb{R})$ mulțimea matricelor pătrate de ordin doi și cu elemente numere reale. Arătați că:
 - a) $\det(X + Y) + \det(X - Y) = 2(\det X + \det Y)$, oricare ar fi $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$;
 - b) Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ atunci sau $\det(A + B) \geq \det A + \det B$ sau $\det(A - B) \geq \det A + \det B$;
 - c) Andrei vrea să arate că la orice alegere de trei matrici $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ poate alege semne $+$ sau $-$ astfel încât $\det(A \pm B \pm C) \geq \det A + \det B + \det C$. Aflați dacă acest lucru este posibil.
Dacă da, considerând $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, aflați cum trebuie să aleagă Andrei semnele $+$ și $-$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XII-A

1. Considerând inelul $(\mathbb{Z}_{2014}; +; \cdot)$, se cere:

- a) Arătați că $\widehat{53}$ nu este inversabil;
- b) Arătați că $\widehat{2011}$ este inversabil și are inversul $\widehat{671}$;
- c) Rezolvați în $\mathbb{Z}_{2014}$ ecuația $\widehat{3} \cdot x + \widehat{2010} = \widehat{1}$

2. Fie funcția $f: [-1; 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2e^x}, & x \in [-1; 0] \\ \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & x \in (0; 3] \end{cases}$

a) Arătați că f admite primitive;

b) Arătați că $F: [-1; 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^x}, & x \in [-1; 0] \\ 2\sqrt{x+1} - 2\ln(1+\sqrt{1+x}) + 2\ln 2 - 2, & x \in (0; 3] \end{cases}$

este primitiva funcției f care se anulează în $x=0$;

c) Calculați $\int_{-1}^3 f(x) dx$

3. Pe $\mathbb{Z}$ se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$.

- a) Arătați că legea $\circ$ este comutativă, asociativă și cu element neutru;
- b) Determinați mulțimea elementelor inversabile din $(\mathbb{Z}; \circ)$;
- c) Pe tablă sunt scrise numerele 0, 1, 2, ..., 24. Cei 24 de elevi ai clasei trec pe rând la tablă și aleg câte 2 numere de pe tablă, le șterg și scriu pe tablă rezultatul compunerii, după legea $\circ$, a celor două numerele alese. Aflați ce număr va scrie pe tablă ultimul elev.

4. Fie $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Se cere:

- a) Calculați I_1 ;
- b) Arătați că $(n+1)I_n + I_{n+1} = e$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$;
- c) Arătați că I_n este număr rațional numai în cazul $n=1$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.