CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecția mediului

CLASA a IX-a

1. Pe un bulevard sunt 100 de felinare, numerotate 1, 2, ..., 100. Inițial, pentru decor, felinarele 1, 4, 7, ... ,97, 100 sunt cu lumină galbenă iar restul cu lumină albă. Cu ocazia sărbătorilor de iarnă, începând de la felinarul 100 şi în sens descrescător din doi în doi, la fiecare felinar întâlnit se adaugă un filtru albastru. Astfel, datorită proprietății culorilor derivate, o parte din felinare rămân cu lumină albă, o parte rămân cu lumină galbenă, o parte devin cu lumină albastră (alb + albastru = albastru) iar o parte devin cu lumină verde (galben + albastru = verde). Aflați câte din cele 100 de felinare vor fi din fiecare culoare.

2. O sală de spectacol are locurile dispuse pe rânduri şi pe fiecare rând, începând cu al doilea, se află cu câte două locuri mai multe decât pe rândul precedent. Ştiind că pe primul rând sunt 38 de locuri şi în total sala are 2010 locuri, aflați pe câte rânduri sunt dispuse locurile în acea sală.

3. Pentru fiecare $a \in \mathbb{R}$ se consideră ecuația $x^2 - 2x + (2011 - a) = 0$, notată $E(a)$.

a) Determinați valorile $a \in \mathbb{R}$ pentru care $E(a)$ are rădăcini reale;

b) Determinați suma şi produsul rădăcinilor ecuației $E(a)$;

c) Determinați valorile $a \in \mathbb{R}$ pentru care $E(a)$ are ambele rădăcini numere naturale.

d) Determinați valorile $a \in \mathbb{R}$ pentru care $E(a)$ are ambele rădăcini numere raționale.

4. O foaie de tablă este de forma unui triunghi ABC dreptunghic în A şi cu $m(\sphericalangle ACB) = 36^0$. Se trasează pe foaie segmentele $[AM]$, cu $M \in (BC)$ încât $CM = AC$ şi apoi $[BN]$ cu $N \in (AC)$ încât $AN = BM$. Să se demonstreze că:

a) dacă se notează $AM \cap BN = \{P\}$, punctul P este mijlocul segmentului $[BN]$;

b) dacă se taie foaia după segmentele $[AM]$ şi $[BN]$, se obţin trei triunghiuri isoscele.

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecția mediului

CLASA a X-a

1. Rezolvați ecuațiile :

a) $\log_3(x+3)\cdot\log_{x-3}3=2$, $x\in\mathbb{R}$;

b) $4^x-9^x=10^x-15^x$, $x\in\mathbb{R}$.

2. Fie $\mathbb{C}$ mulțimea numerelor complexe, atunci:

a) Demonstrați că pentru orice $z\in\mathbb{C}$, dacă $\overline{z}=z$ atunci z este număr real($\overline{z}$ este conjugatul complex al numărului complex z);

b) Demonstrați că pentru orice două numere $z_1, z_2\in\mathbb{C}^*$, $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ și $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

c) Demonstrați că pentru orice $z\in\mathbb{C}$, $z+\overline{z}$ şi $z\cdot\overline{z}$ sunt numere reale;

d) Dacă $z=\frac{2010+2011i}{2011+2010i}$ arătați că $z\cdot\overline{z}=1$ şi $\overline{z}\left(z^2+1\right)\in\mathbb{R}$.

3. Într-o populație de şoricei 25% sunt albi iar restul sunt negri. Printre cei albi 50% sunt cu ochi albaştri iar dintre cei negri doar 20% au ochi albaştri. Dacă 99 de şoricei au ochi albaştri, aflați câți şoricei sunt în total.

4. Un experiment de biochimie cercetează comportamentul unui mediu la o variație tipică de temperatură, pe durate de 10 secunde. Pe parcursul unei desfăşurări a experimentului un termostat reglează temperatura mediului cercetat în funcție de factorul *moment*, astfel ca la fiecare moment $t\in[0;10]$ temperatura mediului cercetat să fie $T(t)=\left[\sqrt{t^2-6t+81}\right]$ grade, în care $[m]$ înseamnă partea întreagă a numărului m .(Spre exemplu $\left[\sqrt{76}\right]=8$ deoarece $\sqrt{76}\in[8;9)$).

a) Aflați temperatura mediului la momentul de început şi la momentul final al experimentului;

b) Aflați dacă pe parcursul experimentului se mai înregistrează măcar încă o dată temperatura de la momentul de început şi în caz afirmativ determinați un astfel de moment;

c) Demonstrați că termostatul nu permite scăderea temperaturii mediului sub valoarea de 8 grade;

d) Determinați temperatura maximă pe care o atinge mediul pe parcursul experienței;

e) Demonstrați că temperatura maximă este atinsă doar la un singur moment al experimentului.

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011

Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecția mediului

CLASA a XI-a

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\2&1&0\end{pmatrix}$ şi $C(A)=\{X\in M_3(\mathbb{C})/\ A\cdot X=X\cdot A\}$

a) Calculați A^2 şi A^3;

b) Arătați că matricele din $C(A)$ sunt de forma $X=\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix}$;

c) Arătați că ecuația $X^3=O_3$ are o infinitate de soluții în $M_3(\mathbb{C})$;

d) Arătați că ecuația $X^3=A$ nu are soluții în $M_3(\mathbb{C})$.

2. Determinați numerele reale a şi b încât $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+a}-b}{x^2+2x-3}=\dfrac{3}{16}$

3. Fie matricele de forma $A=\begin{pmatrix}0&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&0&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&0\end{pmatrix}$, $A\in M_3(\mathbb{R})$.

a) Calculați $\det A$;

b) Arătați că există matrice A de această formă, cu $\det A=0$ şi care are elementele nesituate pe diagonala principală egale cu 2011 sau -2011;

c) Arătați că există matrice A de această formă, cu $\det A=0$ şi care are elementele nesituate pe diagonala principală numere întregi nenule şi distincte două câte două.

d) La următorul joc se folosesc tablouri matriceale de forma din figură şi doi participanți completează pe rând cele şase căsuțe libere, scriind într-o căsuță liberă, câte

d) un număr întreg nenul.

$$\begin{pmatrix}0&\square&\square\\\square&0&\square\\\square&\square&0\end{pmatrix}$$

Câştigă cel care începe jocul dacă determinantul matricei obținută este diferit de zero, respectiv câştigă celălalt participant dacă determinantul este egal cu zero. Descoperiți o strategie prin care al doilea jucător să câştige jocul indiferent de cum joacă primul jucător.

4. O piesă a unui angrenaj are forma unui patrulater ale cărui vârfuri într-un reper cartezian ortogonal sunt punctele $A(2;2)$, $B(9;1)$, $C(14;6)$ şi $D(1;5)$ iar unitatea de lungime în reper de $1\ cm$. Se cere:

a) Determinați coordonatele mijlocului M al diagonalei BD;

b) Demonstrați că M este chiar intersecția diagonalelor patrulaterului(A, M, C-coliniare);

c) Determinați aria patrulaterului;

d) Dacă trei dintre vârfurile patrulaterului sunt vârfurile unui paralelogram interior plăcii, aflați aria acestui paralelogram;

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecția mediului

CLASA a XII-a

1. Pe mulțimea numerelor reale, se defineşte legea de compoziție $x \circ y = 2011 \cdot (xy - x - y) + 2012$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $x \circ y = 2011 \cdot (x-1) \cdot (y-1) + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

b) Demonstrați că legea este asociativă şi că $x \circ y \circ z = 2011^2 \cdot (x-1) \cdot (y-1) \cdot (z-1) + 1, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$;

c) Demonstrați că mulțimea $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{R}$ față de legea „$\circ$” şi că $(G;\circ)$ este grup comutativ;

d) Rezolvați ecuația $x \circ x \circ x \circ x = 2011^7 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Demonstrați că:

a) $1 - x + x^2 - x^3 \le \dfrac{1}{1+x} \le 1 - x + x^2$, oricare ar fi $x \in [0; 1]$;

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$ şi, folosind eventual a), deduceți că: $\dfrac{7}{12} \le \ln 2 \le \dfrac{5}{6}$;

c) $\dfrac{455}{528} \le \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^5} \le \frac{61}{66}$.

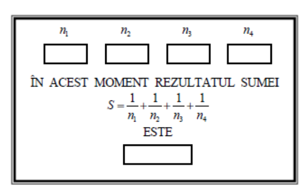
3. Fie funcțiile f, g şi h definite prin: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x}$; $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ şi $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} f(x), \text{ dacă } x \in (-\infty; 1) \\ g(x), \text{ dacă } x \in [1; +\infty) \end{cases}$

a) Justificați că funcțiile f, g, h sunt primitivabile şi calculați $\int f(x)\,dx$, $\int g(x)\,dx$, $\int h(x)\,dx$;

b) Justificați că funcția h este integrabilă pe $[0; e]$ şi calculați $\displaystyle\int_0^e h(x)\,dx$.

4. Un program de calculator funcționează astfel:

La deschidere afişează pe ecranul monitorului 5 căsuțe ca în figura alăturată şi solicită utilizatorului să scrie în fiecare din căsuțele n_1, n_2, n_3, n_4 câte un număr real nenul;



După scrierea celor patru numere reale n_1, n_2, n_3, n_4 în cea de a cincea căsuță programul afişează instantaneu rezultatul sumei $S = \dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{n_3} + \dfrac{1}{n_4}$. În continuare programul lucrează astfel:

La fiecare click succesiv din mouse în oricare două din căsuțele n_1, n_2, n_3, n_4, în care să zicem că apar două numere a şi b, aceste numere sunt înlocuite automat cu numerele $a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$ şi $a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$, cu afişare în a cincea căsuță a noului rezultat al sumei S;

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecția mediului

Se cere să se demonstreze că:

a) Dacă $a \cdot b \neq 0$ atunci $a+b+\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$ şi $a+b-\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$;

b) Dacă $a \cdot b \neq 0$ atunci $\frac{1}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$;

c) Dacă utilizatorul alege la pornire 4 numere şi pe monitor apare $S=2011$ atunci în orice moment al acelei aplicări a programului suma S afişată pe monitor rămâne permanent 2011;
Dacă utilizatorul alege la pornire numerele 8044, 8045, 8046 şi 8047, atunci în orice moment al acelei aplicări a programului nici unul din cele patru numere afişate nu va deveni 2011.

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*