CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A IX A

1.
a) Dați exemplu de o ecuație de gradul al doilea având coeficienți raționali care admite ca rădăcină numărul $x_1 = -1+\sqrt{3}$.
b) Un agent economic a închiriat spre amenajare un spațiu comercial în care pardoseala are forma unui pătrat cu latura egală cu $2x-3$ metri. Într-un colț, sub forma unui pătrat cu latura egală cu x metri, amenajează magazia iar restul de 24 metri pătrați îi are la dispoziție pentru expunerea mărfii. Ce suprafață a închiriat ?
Soluție:
a) Considerând $x_1 = -1+\sqrt{3}$ si $x_2 = -1-\sqrt{3}$ obținem $S=-2, P=-2$,
iar ecuația ceruta este $x^2-2x-2=0$ 3p
b) Spațiul închiriat are suprafața egala cu $(2x-3)^2(m^2)$ 1p
Enunțul se scrie astfel : $(2x-3)^2 = x^2+24$ 1p
Obține ecuația de gradul al doilea : $3x^2-12x-15=0$ 1p
Obține soluțiile $x_1=5; x_2=-1$,
Finalizare : Numai x=5 convine iar suprafața închiriata are 49 m^2 .... 1p

2. Se consideră triunghiul *ABC* şi punctele *M, N* în planul triunghiului astfel încât $\overrightarrow{AM} = 2\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ iar $\overrightarrow{CN} = q\cdot\overrightarrow{CB}$, unde $q>0$.
a) Demonstrați că $\overrightarrow{AN} = (1-q)\cdot\overrightarrow{AC}+q\cdot\overrightarrow{AB}$.
b) Să se determine q astfel încât punctele A,M.,N să fie coliniare.
Soluție:
a) Aplică regula triunghiului si obține relația ceruta 4p
b) Scrie condiția de coliniaritate a doi vectori si o aplica in cazul concret 2p
Finalizare $q=\frac{2}{3}$ 1p

3. Se consideră şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1=2, a_{n+1} = 2-\frac{1}{a_n}$, pentru orice $n\geq 1$ şi $b_n = \frac{3-a_n}{a_n-1}$, pentru orice $n\geq 1$.
a) Determinați termenii a_2, a_3, a_4.
b) Utilizând metoda inducției matematice arătați că $a_n = \frac{n+1}{n}$, pentru orice n ≥ 1.
c) Arătați că şirul b_n este progresie aritmetică.
Soluție:
a) Pentru n=1,n=2,n=3 obține $a_2=\frac{3}{2}, a_3=\frac{4}{3}, a_4=\frac{5}{4}$ 3x1p
b) Parcurge etapa verificării: $P(1)-(A)$ 1p
Demonstrează implicația $P(k)\Rightarrow P(k+1)$ 1p

c) Calculează $b_n = \dfrac{3-a_n}{a_n-1} = \dfrac{3-\dfrac{n+1}{n}}{\dfrac{n+1}{n}-1} = 2n-1$ 1p

Finalizare: $b_{n+1} - b_n = 2$, deci şirul este o progresie aritmetica 1p

4. Matei şi Irina sunt elevi în clasa a IX-a şi studiază la şcoală 15 discipline obținând la sfârşitul semestrului I aceeaşi medie generală. Ştiind că au avut numai medii de opt, nouă şi zece iar numărul mediilor de zece ,nouă şi opt ale lui Matei este respectiv egal cu numărul mediilor de nouă, opt şi zece ale Irinei, precizați câte medii de zece are Irina.?

Soluție:

Dacă notăm cu ***a*** - numărul mediilor de zece ale lui Matei
b - numărul mediilor de noua ale lui Matei
c - numărul mediilor de opt ale lui Matei

Atunci $a + b + c = 15$ 2p

În aceste condiții Irina va avea a - medii de noua; b - medii de opt şi c - medii de zece 1p

Scrie condiția ca elevii sa aibă aceeaşi medie semestrială: $10a + 9b + 8c = 9a + 8b + 10c$ 2p

Obține $a + b = 2c$ 1p

Finalizare: Deduce $c = 5$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A X A

1.

a) Dacă a = $\sqrt{2x+3}, b=\sqrt[3]{4x-4}, x\in[-\frac{3}{2},\infty)$, demonstrați că $2a^2-b^3=10$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases}2a^2-b^3=10\\ a+b=5\end{cases}$.

Soluție:

a) Avem $a^2 = 2x + 3,\ b^3 = 4x - 4$ 2p

Finalizare 1p

b) Obține ecuația $2\cdot(5 - b)^2 - b^3 = 10$ 2p

adică $(b - 2)\cdot(b^2 + 20) = 0$ 1p

Soluția sistemului a = 3, b = 2 .... 1p

2. Fie funcția $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(z)=1-\varepsilon z$, unde $\varepsilon=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Verificați că $\varepsilon^2-\varepsilon+1=0,\ \varepsilon^3=-1$

b) Arătați că $f(f(z))=1-\varepsilon+\varepsilon^2 z, \forall z\in\mathbb{C}$.

c) Demonstrați că $f(f(f(z)))=z,\ \forall z\in\mathbb{C}$.

Soluție:

a) Calcul 3p

b) Efectuează corect si foloseşte punctul precedent 2p

Finalizare 1p

c) Folosind punctul b), demonstrează identitatea 1p

3. Se consideră mulțimea $G=\left\{w\in\mathbb{C}\mid w=\frac{z}{|z|}+\frac{|z|}{z}, \forall z\in\mathbb{C}^*\right\}$.

a) Arătați că. $\forall w\in G\Rightarrow w\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $-2\le\frac{z}{|z|}+\frac{|z|}{z}\le 2, (\forall) z\in C^*$.

Soluție:

a) Dacă notăm w = $\frac{z}{|z|}+\frac{|z|}{z}$, avem $\overline{w}=\frac{\overline{z}}{|z|}+\frac{|z|}{\overline{z}}$ 2p

Deoarece $z\cdot\overline{z}=|z|^2$, obținem $\overline{w}=w$ 2p

b) Folosind $|a+b|\le|a|+|b|$, avem $\left|\frac{z}{|z|}+\frac{|z|}{z}\right|\le\frac{|z|}{|z|}+\frac{|z|}{|z|}=2$ 2p

Finalizare 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

4. Se consideră funcția $f:(0,1)\to R, f(x)=\dfrac{\log_2(1-x^2)}{x^2}$ şi notăm

$$S_n=\frac{1}{2^2}f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^2}f\left(\frac{1}{3}\right)+...+\frac{1}{n^2}f\left(\frac{1}{n}\right), n\in N, n\geq 2.$$

a) Demonstrați că $\dfrac{1}{k^2}f\left(\dfrac{1}{k}\right)=\log_2(k+1)-2\log_2 k+\log_2(k-1), \quad \forall k\geq 2$.

b) Să se demonstreze că $S_n=\log_2\dfrac{n+1}{2n}, (\forall) n\geq 2.$

c) Arătați că $S_n\in R\backslash Q, \ (\forall) n\geq 2.$

<u>Soluție:</u>

a) $\dfrac{1}{n^2}f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\log_2\dfrac{n^2-1}{n^2}$ 1p

Foloseşte corect formulele de la logaritm 2p

Finalizare 1p

b) Observa ca suma ceruta este telescopica si obține rezultatul cerut 2p

c) Presupunem prin reducere la absurd , că $\log_2\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{a}{b}, \ a,b\in N, b\neq 0$

Obținem $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^b=2^{a+b}$, imposibil 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A XI A

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi $M_t=\frac{t}{2}\cdot A+\frac{1}{2t}\cdot B, t>0$

a) Calculați $A^2, B^2, A\cdot B, B\cdot A$.

b) Verificați identitatea $M_t\cdot M_v=M_{t\cdot v}, (\forall)t,v>0$.

c) Arătați că pentru orice t>0 matricea M_t este inversabilă.

Soluție:

a) Pentru fiecare cerința se acorda cate un punct 4x1p
b) Folosind informațiile de la punctul precedent, obține cerință 2p
c) Calculează determinantul si arata ca e nenul 1p

2. Se consideră funcția $f:R^*\to R, f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$

a) Determinați asimptota spre $-\infty$ la graficul funcției f.

b) Calculați $\left(f(-1)+2\cdot f\left(\frac{-1}{2}\right)+...+n\cdot f\left(\frac{-1}{n}\right)\right)$

Soluție:

a) Pentru încercarea de a căuta asimptota orizontala 2p
Pentru găsirea concreta a asimptotei oblice 2p
b) Înlocuirea corecta a termenilor în suma 1p
Observa ca avem o progresie geometrică 1p
Finalizare 1p

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+\cos x$.

a) Să se calculeze $f(0)$ şi . $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Să se arate că $f(x)\geq x-1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

c) Să se identifice un $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(a)=a-1$ şi să se calculeze limita funcției f la $+\infty$.

Soluție:

a) Pentru fiecare cerinta corect rezolvata cate un punct 2x1p
b) $\cos x\geq -1, \forall x\in\mathbb{R}$ 1p
Concluzie 1p
c) Pentru orice a corect identificat (de exemplu π) 1p
Folosind corect punctul b, deduce ca limita ceruta este $+\infty$ 2p

4. Fie M mulțimea tuturor matricilor de tip 3x3, în care toate elementele aparțin mulțimii $\{0,1\}$ (aceste matrici se numesc coduri de lungime 9).

a) Să se dea un exemplu de un cod A din mulțimea M care are determinantul egal cu -1.

b) Să se determine numărul total de coduri din mulțimea M.

c) Să se indice 2 matrice diferite A şi B din M ,care au proprietatea $A^2=B^2=I_3$.

Soluție:

a) Orice exemplu corect, căreia ii calculează si determinantul 3p
b) Observa ca avem un număr de funcții si obține $2^9=512$ 2p
c) Fiecare exemplu verificat primeşte cate un punct 2x1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera tehnologica : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII A

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $M_t=\frac{t}{2}\cdot A+\frac{1}{2t^2}\cdot B$, iar $G=\{M_t \mid t>0\}$

a) Calculați $A^2, B^2, A\cdot B, B\cdot A$.

b) Arătați că G este parte stabilă a mulțimii $M_2(R)$ in raport cu înmulțirea matricelor

c) Arătați ca $(G,\bullet)$ este grup abelian.

Soluție:

a) Pentru fiecare din cele 4 cerințe cate 0,5 p 2p
b) Efectuează calculele si foloseşte corect punctul anterior 2p
c) Scrierea corecta a celor 5 axiome , invocarea punctului b si verificarea celorlalte 3p

2. Se considera funcția $f:R\to R$ $f(x)=1+x+x^2+...+x^{2010}$ iar $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

a) Verificați că $(1-x)\cdot f(x)=1-x^{2011}, \forall x\in R$.
b) Să se arate că funcția F este strict crescătoare
c) Să se arate că $F(1)>3$.

Soluție:

a) Pentru calcule corecte sau aplicarea formulei 3p
b) Pentru rolul derivatei I...1p
Pentru demonstrarea faptului ca derivata este strict pozitiva (eventual folosind pct. a)) 2p
c) Calculează integrala si arata ca valoarea ei este mai mare ca 3 .... 1p

3. Fie $I_n=\int_1^e (\ln x)^n dx$, $n\geq 1$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $I_{2011}\leq I_{2010}$.

Soluție:

a) Pentru aplicarea integrării prin părti 2p
Finalizare 2p
b) Calculează $I_{2011}-I_{2010}$ si argumentează pozitivitatea 3p

4. Fie $G\subset\mathbb{Z}$, o mulțime finită şi nevidă. Se ştie că $\forall\, x,y\in G\Rightarrow x\bullet y\in G$

a) Să se dea un exemplu de mulțime G care verifică proprietățile de mai sus.
b) Arătați că $2\notin G$ şi că G are maxim 3 elemente.
c) Dacă în plus G nu conține pe 0 , atunci $(G,\bullet)$ este grup.

Soluție:

a) De exemplu $G=\{1,-1\}$ sau alt exemplu corect 3p
b) Daca $2\in G\Rightarrow 2^n\in G, \forall n\in\mathbb{N}$ 1p
Deci elementele pot fi -1,0,1 .... 1p
c) Observam ca G poate fi doar exemplul dat mai sus la pct a 1p
Arata ca G e grup (eventual cu tabla operației) 1p