

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

5p	1. Determinați numărul real x , știind că numerele 7, $3x$ și $x^2 + 2$ sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
5p	2. Determinați numărul real m , știind că parabola asociată funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m$ este tangentă axei Ox .
5p	3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-9} = 32^x$.
5p	4. Calculați probabilitatea ca, alegând o submulțime a mulțimii $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}\}$, aceasta să aibă cel mult două elemente.
5p	5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ și $C(1, 4)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul B și este paralelă cu mediana din A a triunghiului ABC .
5p	6. Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $A = \frac{3\pi}{4}$ și $BC = \sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	a) Arătați că $\det(A(10)) = 1024$.
5p	b) Determinați numerele reale x , știind că $A(x) \cdot A(2x) = A(x^2 + 2)$.
5p	c) Știind că $A(n) = A(1) \cdot A(2) \cdot A(3) \cdot \dots \cdot A(2016)$, demonstrați că n este număr natural divizibil cu 2017.
	2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 5X + a$, unde a este număr real.
5p	a) Arătați că $f(0) = a$.
5p	b) Determinați numărul real a pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2016 - 4a$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
5p	c) Demonstrați că polinomul f are cel mult o rădăcină în mulțimea numerelor întregi.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$.
5p	a) Arătați că $f'(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$.
5p	c) Demonstrați că $f(2\sqrt{3}) < f(3\sqrt{2})$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$.

5p a) Arătați că $I_1 = \frac{2}{3}$.

5p b) Demonstrați că $I_{n+1} \leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n .

5p c) Demonstrați că $(2n+3)I_{n+1} = 2(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n .

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$7 + x^2 + 2 = 2 \cdot 3x$ $x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$	3p 2p
2.	$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4 - 4m = 0$ $m = 1$	3p 2p
3.	$(2^{-1})^{4x-9} = 2^{5x} \Leftrightarrow -4x + 9 = 5x$ $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea A are $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6 = 64$ de submulțimi, deci sunt 64 de cazuri posibile Mulțimea A are $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 = 1 + 6 + 15 = 22$ de submulțimi cu cel mult două elemente, deci sunt 22 de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$	2p 2p 1p
5.	Punctul $M(1, 2)$ este mijlocul laturii BC $m_{AM} = \frac{2-0}{1-(-1)} = 1$ Ecuația dreptei care trece prin punctul B și este paralelă cu dreapta AM este $y = x - 1$	1p 2p 2p
6.	$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2 \sin \frac{3\pi}{4}} =$ $= 1$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(10) = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(10)) = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{vmatrix} =$ $= 2^{10} = 1024$	2p 3p
b)	$A(x) \cdot A(2x) = A(3x)$ $A(3x) = A(x^2 + 2) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ și } x_2 = 2$	2p 3p
c)	Deoarece $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$, pentru orice numere reale x și y , obținem $A(n) =$ $= A(1) \cdot A(2) \cdot A(3) \cdot \dots \cdot A(2016) = A(1 + 2 + 3 + \dots + 2016) = A(2017 \cdot 1008)$ $n = 2017 \cdot 1008$, deci n este număr natural divizibil cu 2017	3p 2p

2.a)	$f(0) = 0^3 - 5 \cdot 0 + a =$ $= 0 - 0 + a = a$	3p 2p
b)	$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 5(x_1 + x_2 + x_3) - 3a = -3a$ $-3a = 2016 - 4a \Leftrightarrow a = 2016$	3p 2p
c)	Presupunem că f are cel puțin două rădăcini întregi x_1 și x_2 ; cum $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 \in \mathbb{Z}$ Știind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 10$, dacă $x_1^2 \geq x_2^2 \geq x_3^2$, obținem $x_1^2 = 9$, $x_2^2 = 1$ și $x_3^2 = 0$ Deoarece pentru valorile pe care le obținem pentru x_1 , x_2 și x_3 , relația $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ nu este verificată, polinomul f are cel mult o rădăcină întreagă	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (e^x)' - \left(\frac{1}{2}x^2\right)' - x' - 1' =$ $= e^x - \frac{1}{2} \cdot 2x - 1 = e^x - x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	Aplicând succesiv teorema lui l'Hospital, obținem $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x - 1}{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x - x - 1} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 1$	3p 2p
c)	$f''(x) = e^x - 1 > 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci f' strict crescătoare pe $(0, +\infty)$ și cum $f'(0) = 0$, obținem $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci f strict crescătoare pe $(0, +\infty)$ $0 < 2\sqrt{3} < 3\sqrt{2} \Rightarrow f(2\sqrt{3}) < f(3\sqrt{2})$	3p 2p
2.a)	$I_1 = \int_0^1 (1 - x^2) dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right) \Big _0^1 =$ $= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	3p 2p
b)	$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (-x^2) (1 - x^2)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n Pentru orice număr natural nenul n și $x \in [0, 1]$ avem $-x^2 \leq 0$ și $(1 - x^2)^n \geq 0$, deci $I_{n+1} \leq I_n$	2p 3p
c)	$I_{n+1} = \int_0^1 x' (1 - x^2)^{n+1} dx = x (1 - x^2)^{n+1} \Big _0^1 - \int_0^1 x(n+1)(1 - x^2)^n (-2x) dx =$ $= 2(n+1) \int_0^1 x^2 (1 - x^2)^n dx = -2(n+1) \int_0^1 (1 - x^2 - 1)(1 - x^2)^n dx = -2(n+1)(I_{n+1} - I_n)$, deci $(2n+3)I_{n+1} = 2(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n	2p 3p