

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

5p	1. Determinați primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_5 = 48$ și $b_8 = 384$.
5p	2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 7x + 6$. Determinați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox .
5p	3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $32^x = 16 \cdot 2^x$.
5p	4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr natural n din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, acesta să verifice egalitatea $n^2 - 5n + 6 = 0$.
5p	5. Determinați numărul real a , știind că vectorii $\vec{u} = (a+1)\vec{i} + (a-1)\vec{j}$ și $\vec{v} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	6. Arătați că $(2\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + 2\cos x)^2 - 4\sin 2x = 5$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.
5p	a) Arătați că $\det(2A) = -28$.
5p	b) Determinați numerele reale x și y , știind că $A + 2B = I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5p	c) Dacă $AB = BA$, arătați că $\det B \leq 0$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$.
5p	a) Arătați că $(-1) \circ 1 = -1$.
5p	b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = x$.
5p	c) Determinați perechile (a, b) de numerele întregi, știind că $a \circ b = 8$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)e^x$.
5p	a) Arătați că $f'(x) = (x-1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f .
5p	c) Demonstrați că $f'(x) \geq -1$, pentru orice număr real x .
	2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x}$.
5p	a) Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) dx = 3$.
5p	b) Demonstrați că funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + \ln x + 2016$ este o primitivă a funcției f .
5p	c) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ este mai mic decât 14π .

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b_1 \cdot q^4 = 48$ și $b_1 \cdot q^7 = 384 \Rightarrow q = 2$ $b_1 = 3$	3p 2p
2.	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ și $x_2 = 6$, deci graficul funcției f intersectează axa Ox în punctele $(1, 0)$ și $(6, 0)$ Distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox este egală cu 5	3p 2p
3.	$(2^5)^x = 2^4 \cdot 2^x \Leftrightarrow 5x = 4 + x$ $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile În mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ sunt 2 numere care verifică egalitatea, deci sunt 2 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{5}$	1p 2p 2p
5.	$\frac{a+1}{6} = \frac{a-1}{2} \Leftrightarrow 2a+2 = 6a-6$ $a = 2$	3p 2p
6.	$(2 \sin x + \cos x)^2 = 4 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x + \cos^2 x$ $(\sin x + 2 \cos x)^2 = \sin^2 x + 4 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x \Rightarrow (2 \sin x + \cos x)^2 + (\sin x + 2 \cos x)^2 - 4 \sin 2x = 5(\sin^2 x + \cos^2 x) + 8 \sin x \cos x - 4 \cdot 2 \sin x \cos x = 5$, pentru orice număr real x	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(2A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} =$ $= 2 \cdot 2 - 4 \cdot 8 = 4 - 32 = -28$	3p 2p
b)	$A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2x \\ 2y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+2x \\ 4+2y & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2+2x \\ 4+2y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -1$ și $y = -2$	2p 3p
c)	$AB = \begin{pmatrix} 2y & x \\ y & 4x \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 4x & x \\ y & 2y \end{pmatrix}$ $AB = BA \Leftrightarrow y = 2x$, deci $\det B = \begin{vmatrix} 0 & x \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -2x^2 \leq 0$, pentru orice număr real x	2p 3p

2.a)	$(-1) \circ 1 = 3 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 2 =$ $= -3 - 3 + 3 + 2 = -1$	3p 2p
b)	$3x^2 + 3x + 3x + 2 = x \Leftrightarrow 3x^2 + 5x + 2 = 0$ $x_1 = -\frac{2}{3}$ și $x_2 = -1$	3p 2p
c)	$3ab + 3a + 3b + 3 - 1 = 8 \Leftrightarrow (a+1)(b+1) = 3$ Cum a și b sunt numere întregi, obținem $(-4, -2)$, $(-2, -4)$, $(0, 2)$ și $(2, 0)$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (x-2)'e^x + (x-2)(e^x)' =$ $= e^x + (x-2)e^x = (x-1)e^x, x \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{e^{-x}} = 0$ Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	$f''(x) = xe^x, f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $f''(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f'$ este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ $f''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f'$ este crescătoare pe $[0, +\infty) \Rightarrow f'(x) \geq f'(0) = -1$, pentru orice număr real x	2p 1p 2p
2.a)	$\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^2 2x dx = x^2 \Big _1^2 =$ $= 4 - 1 = 3$	3p 2p
b)	$F'(x) = (x^2 + \ln x + 2016)' = 2x + \frac{1}{x} =$ $= \frac{2x^2 + 1}{x} = f(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	2p 3p
c)	$V = \pi \int_1^2 g^2(x) dx = \pi \int_1^2 \left(\frac{2x^2 + 1}{x} \right)^2 dx = \pi \int_1^2 \left(4x^2 + 4 + \frac{1}{x^2} \right) dx =$ $= \pi \left(\frac{4x^3}{3} + 4x - \frac{1}{x} \right) \Big _1^2 = \frac{83\pi}{6} < 14\pi$	2p 3p