

Funcția putere

Definiție. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow D$, $f(x) = x^n$, unde $D = \mathbb{R}$, dacă n este impar și $D = [0; +\infty)$ dacă n este par, se numește **funcție putere de exponent natural n** .

Ex. 1. $f : \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$, $f(x) = x^2$.

a). Completați valorile funcției în tabel:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$							

b). Desenați graficul funcției în reperul cartezian xOy

c). Determinați prin lectură grafică, proprietățile funcției.

Proprietățile funcției putere pentru $n=2$

1. f este strict descrescătoare pe $(-\infty; 0)$ și strict crescătoare pe $[0; +\infty)$

2. f este convexă pe $\mathbb{R}$

3. f nu este injectivă pe $\mathbb{R}$ dar este injectivă pe $[0; +\infty)$

4. restricția funcției f la $[0; +\infty)$, adică $f : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$, $f(x) = x^2$ este bijectivă

deci inversabilă, inversa sa este $f^{-1} : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (funcția radical de ordinul doi)

Ex. 2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

a). Completați valorile funcției în tabel:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$							

b). Desenați graficul funcției în reperul cartezian xOy

c). Determinați prin lectură grafică, proprietățile funcției.

Proprietățile funcției putere pentru $n=3$

1. (monotonie).....

2. (convexitate/concavitate).....

3. f este bijectivă pe $\mathbb{R}$ și inversabilă, inversa ei fiind $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$
(funcția radical de ordinul trei)

Funcția radical

Definiție. Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \geq 2$, unde $D = \mathbb{R}$, dacă n este impar și $D = [0; +\infty)$ dacă n este par, se numește **funcție radical de ordinul n** .

Ex. 3. $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

a). Completați valorile funcției în tabel:

x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9	$+\infty$
$f(x)$						

b). Desenați graficul funcției în reperul cartezian xOy

c). Determinați prin lectură grafică, proprietățile funcției.

Proprietățile funcției radical pentru $n=2$

1. (monotonie).....

2. (convexitate/concavitate).....

3. funcția $f : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ este bijectivă și inversabilă, inversa funcției fiind $f^{-1} : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$, $f^{-1}(x) = x^2$.

Ex. 4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

a). Completați valorile funcției în tabel:

x	$-\infty$	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8	$+\infty$
$f(x)$									

b). Desenați graficul funcției în reperul cartezian xOy

c). Determinați prin lectură grafică, proprietățile funcției.

Proprietățile funcției radical pentru $n=3$

1. (monotonie).....

2. (convexitate/concavitate).....

3. (bijectivă/inversabilă).....

Exerciții propuse spre rezolvare

1. Să se realizeze tabelul de valori și să se reprezinte grafic funcțiile:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$, $f(x) = x^2 + 2$, b) $f : \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$, $f(x) = x^3 - 2$,

c) $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + 1$, d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$.

Funcția exponențială

Definiție. Se numește **funcție exponențială**, orice funcție de forma

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), f(x) = a^x \text{ cu } a > 0 \text{ și } a \neq 1.$$

Ex. 5. $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = 2^x$.

a). Completați valorile funcției în tabel:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$							

b). Desenați graficul funcției în reperul cartezian xOy

c). Determinați prin lectură grafică, proprietățile funcției.

d) Reluați cerințele de mai sus pentru funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = 3^x$

Proprietățile funcției exponențiale $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), f(x) = a^x$ pentru $a > 1$

1. (monotonie).....
2. (convexitate/concavitate).....
3. f este bijectivă pe $\mathbb{R}$ și inversabilă, inversa ei fiind

$$f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \log_a x, a > 1$$

Ex. 6. $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. a). Completați valorile funcției în tabel:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$							

- b). Desenați graficul funcției în reperul cartezian xOy
- c). Determinați prin lectură grafică, proprietățile funcției.

d) Reluați cerințele de mai sus pentru funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Proprietățile funcției exponențiale $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), f(x) = a^x$ pentru

$$0 < a < 1$$

1. (monotonie).....
2. (convexitate/concavitate).....
3. f este bijectivă pe $\mathbb{R}$ și inversabilă, inversa ei fiind

$$f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \log_a x, 0 < a < 1$$

Funcția logaritmică

Definiție. Se numește **funcție logaritmică**, orice funcție de forma

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x \text{ cu } a > 0 \text{ și } a \neq 1.$$

Ex. 7. $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x$.

a). Completați valorile funcției în tabel:

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	$+\infty$
$f(x)$							

- b). Desenați graficul funcției în reperul cartezian xOy
- c). Determinați prin lectură grafică, proprietățile funcției.

d) Reluați cerințele de mai sus pentru funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_3 x$, având la grijă ca la tabel să luați valori corespunzătoare pentru x.

Proprietățile funcției logaritmice $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$ pentru $a > 1$

1. (monotonie).....

2. (convexitate/concavitate).....

3. f este bijectivă pe $(0, +\infty)$ și inversabilă, inversa ei fiind

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), f^{-1}(x) = a^x, a > 1$$

Ex. 8. $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

a). Completați valorile funcției în tabel:

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	$+\infty$
$f(x)$							

b). Desenați graficul funcției în reperul cartezian xOy

c). Determinați prin lectură grafică, proprietățile funcției.

d) Reluați cerințele de mai sus pentru funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$,

având la grijă ca la tabel să luați valori corespunzătoare pentru x .

Proprietățile funcției logaritmice $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$ pentru $0 < a < 1$

1. (monotonie).....

2. (convexitate/concavitate).....

3. (bijectivă/inversabilă).....

Exerciții propuse spre rezolvare

1. Realizați tabelul de valori și apoi trasați graficul funcțiilor:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), f(x) = 2^{x-2}$; $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), f(x) = 2^x - 2$

b) $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2(x+1)$; $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x^3$

2. Așezați în ordine crescătoare numerele $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, pentru

$$x \in \left\{ -\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, 0, 1, \frac{1}{2}, \sqrt{3} \right\}.$$