

Breviar teoretic

Forma algebrică a numărului complex este $\boxed{z = x + iy}$ unde $x = \operatorname{Re}(z)$ și $y = \operatorname{Im}(z)$
și $x, y \in \mathbb{R}$ iar $\boxed{i^2 = -1}$

Mulțimea numerelor complexe este $\boxed{\mathbb{C} = \{z = xi + y / x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}}$

Conjugatul numărului complex $z = x + iy$ este $\bar{z} = x - iy$

Modulul numărului complex $z = x + iy$ este $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$

Proprietăți: 1. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ deci $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$

$$2. z + \bar{z} = 2x \in \mathbb{R}$$

$$3. \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \text{și} \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$4. |x + iy| = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \quad \text{iar} \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Operații cu numere complexe

1. Adunarea

Fie $z_1 = x_1 + iy_1$ și $z_2 = x_2 + iy_2$ atunci: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

2. Scăderea

Opusul numărului $z = x + iy$ este $-z = -x - iy$

Fie $z_1 = x_1 + iy_1$ și $z_2 = x_2 + iy_2$ atunci:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

3. Înmulțirea

a) Cu un număr real: $cz = cx + icy, c \in \mathbb{R}$

b) Fie $z_1 = x_1 + iy_1$ și $z_2 = x_2 + iy_2$ atunci:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

c) Puterile lui i : $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$

4. Împărțirea

Inversul numărului $z = x + iy$ este $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ iar $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z_2}}{|z_2|^2}$

Exerciții:

- Dați exemple de numere complexe scrise în forma algebrică
- Fie numerele complexe: $z_1 = 2 - 5i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = -1 - 2i$, $z_4 = 2i$, $z_5 = 3 - 2i$ Calculați:
 - $z_1 + z_2$, b) $z_1 - z_2$; c) $3z_5$; d) $2z_1 - z_2 + 5z_3 - 2z_4 + 7z_5$; e) z_1z_2 , f) z_3z_5 ,
 - z_1^2 ; h) z_4^3 ; j) $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}, \frac{1}{z_4}, \frac{1}{z_5}$; l) $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}, \frac{1}{z_4}, \frac{1}{z_5}$; k) modulele numerelor complexe
 - $\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_4}{z_3}, \frac{z_2}{z_5}$
- Calculați: a) $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{100}$; b) $i^{243} + i^{512}$
- Fie numerele complexe: $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = -1 - i$. Calculați: $|z_1 - z_2 + z_3|$; $|\overline{z_1 + z_3}|$

Rezolvarea ecuației de gradul II în $\mathbb{C}$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dacă $\Delta \geq 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $\Delta < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$ adică sunt numere complexe care se

calculează cu următoarele formule: $x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ și $x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Se observă că $x_2 = \overline{x_1}$ și invers.

Exerciții:

- Rezolvați ecuațiile și precizați ce fel de numere sunt soluțiile: a) $x^2 - 5x + 4 = 0$;
b) $x^2 - 3x + 4 = 0$; c) $2x^2 - x + 1 = 0$; d) $x^2 + 1 = 0$; e) $x^2 - 1 = 0$; f) $x^2 - 3 = 0$;
g) $x^2 + 3 = 0$; h) $x^2 - x = 0$; i) $x^2 + 2x = 0$; j) $-2x^2 - x = 0$; k) $-x^2 - 2 = 0$;
l) $-2x^2 + 3 = 0$