

Fișă de lucru-clasa a X-a – liceu tehnologic

Prof. Mestecan Cornelia

Tema: **Calcul vectorial și analitic în geometria plană**

Breviar teoretic

$$1. \vec{v}(x; y) \rightarrow \vec{v} = x \vec{i} + y \vec{j}, \left| \vec{v} \right| = \sqrt{x^2 + y^2}, x, y \text{ coordonatele vectorului } \vec{v};$$

$$2. \vec{v}_1(x_1; y_1), \vec{v}_2(x_2; y_2), \alpha \in \mathbb{R}, \text{ atunci } \alpha \vec{v}_1(\alpha x_1; \alpha y_1); \vec{v}_1 + \vec{v}_2(x_1 + x_2; y_1 + y_2);$$

$$\vec{v}_1 \text{ coliniar cu } \vec{v}_2 \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \text{ a.î. } \vec{v}_1 = a \vec{v}_2 \text{ sau } \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = a;$$

$$3. M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2) \text{ în sistemul XOY, } \overrightarrow{M_1 M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1),$$

$$\left| \overrightarrow{M_1 M_2} \right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d(M_1; M_2) = l([M_1; M_2])$$

$$4. M(x_M; y_M) \text{ mijlocul segmentului } [AB], A(x_A; y_A), B(x_B; y_B) \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2};$$

$$5. G(x_G; y_G) \text{ centrul de greutate al triunghiului } ABC,$$

$$A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C) \Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3};$$

6. Ecuațiile dreptei în plan

-ecuația generală este $d: ax + by + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ sau } b \neq 0$

-ecuația dreptei determinată de punctul $M_0(x_0; y_0)$ și vectorul $\vec{v}(a; b)$ este $d: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$

-ecuația dreptei de pantă m care trece prin punctul $M_0(x_0; y_0)$ este $d: y - y_0 = m(x - x_0), m \in \mathbb{R}$

-ecuația dreptei care trece prin punctele $M_1(x_1; y_1)$ și $M_2(x_2; y_2)$ este

$$M_1 M_2: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2,$$

-panta dreptei $M_1 M_2$ este $m_{M_1 M_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

-distanța de la un punct $M_0(x_0; y_0)$ la dreapta $d: ax + by + c = 0$, este $d(M_0; d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Coordonatele unui vector în plan; ecuații ale unei drepte în plan

Exerciții propuse:

- Se dau punctele $A(3;2), B(-2;1), C(-4;-2), D(5;-3)$. Să se determine coordonatele vectorilor: a) $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$; b) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$; c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC}$;
- Se dau vectorii $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}; \vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j}; \vec{c} = -\vec{i} + \vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorilor: a) $\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$; b) $\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$; c) $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.
- Să se determine modulul vectorilor $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ dacă: a) $A(-2;0), B(0;2), C(1;3)$; b) $A(4;3), B(-1;2), C(-4;-1)$.
- Scrieți ecuația dreptei determinate de punctul A și vectorul $\vec{v}$: a) $A(4;3), \vec{v}(-1;2)$; b) $A(0;3), \vec{v}(1;-2)$; c) $A(-3;2), \vec{v}(2;3)$; d) $A(-4;-2), \vec{v}(0;2)$; e) $A(-5;3), \vec{v}(-1;0)$.
- Se dau punctele: $A(6;2), B(-5;-4), C(4;-2)$. Să se determine: a) ecuațiile dreptelor $AB; AC; BC$; b) ecuațiile dreptelor AM, BN și CP , unde M, N, P sunt mijloacele segmentelor $[BC], [AC]$ și $[AB]$.
- Mijloace laturilor triunghiului ABC sunt punctele $M(1;4); N(-2;3); P(-1;-2)$. Să se afle: a) coordonatele vârfurilor A, B, C ; b) lungimile medianelor triunghiului ABC ; c) coordonatele centrului de greutate G al triunghiului ABC ; d) coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AG}$; e) ecuațiile dreptelor $AB; AG; BC; CA$; f) ecuațiile medianelor triunghiului.

Condiții de paralelism, condiții de coliniaritate; linii importante în triunghi

-pozițiile relative ale dreptelor în plan

$d_1; d_2$	$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$	$d_1 : y = m_1x + n_1$ $d_2 : y = m_2x + n_2$
Coincid	$d_1 = d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	$d_1 = d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \text{ și } n_1 = n_2$
Paralele	$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \text{ și } n_1 \neq n_2$
Perpendiculare	$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$	$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

Exerciții propuse:

1. Se dau dreptele $d_1 : x + y = 0$; $d_2 : x + y - 3 = 0$; $d_3 : x - y + 1 = 0$; $d_4 : y = 2x$;
 $d_5 : 2x + 2y + 5 = 0$; $d_6 : -x + y - 7 = 0$; $d_7 : 4x - 2y + 3 = 0$
 Determinați perechile de drepte paralele sau perpendiculare.
2. Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul A și este paralela cu dreapta d .
 a) $A(1;2), d : x + 3y = 0$; b) $A(-2;1), d : 2x - 3y + 7 = 0$; c) $A(\sqrt{2};1), d : -x + 2y - 1 = 0$;
 d) $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right), d : 3x + 2y + 7 = 0$.
3. Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculara pe dreapta d .
 a) $A(2;1), d : x + 2y + 1 = 0$; b) $A(-3;0), d : 5x + 2y - 7 = 0$;
 c) $A(1; -\sqrt{2}), d : x - y + 3 = 0$; d) $A\left(0; \frac{1}{3}\right), d : 0,1x + 0,5y + 1,2 = 0$.
4. Se consideră triunghiul ABC cu vârfurile $A(5;4), B(0;3), C(-4;-2)$. Să se scrie ecuațiile:
 a) medianelor triunghiului; b) înălțimilor triunghiului; c) mediatoarelor triunghiului.
5. Se consideră pătratul $ABCD$ cu vârfurile $A(4;4), B(4;-4), C(-4;-4)$ și fie E mijlocul laturii $[BC]$. Să se scrie ecuațiile:
 a) dreptei d_1 care trece prin E și este paralela cu AC .
 b) dreptei d_2 care trece prin E și este paralela cu BD .
 c) dreptei d_3 care trece prin E și este perpendiculara pe AC .
6. Un triunghi are laturile de ecuații $x + y = 4; 2x - y = 2; 4x + y = 22$. Să se determine:
 a) coordonatele vârfurilor triunghiului; b) ecuațiile medianelor triunghiului; c) ecuațiile înălțimilor
 triunghiului.
7. Se consideră punctele $A(2;3), B(-6;0), C(4;-6)$. Să se determine:
 a) lungimile laturilor triunghiului ABC ; b) ecuațiile laturilor triunghiului ABC ;
 c) lungimile înălțimilor triunghiului ABC ; d) aria triunghiului ABC .
8. Să se calculeze aria triunghiului cu laturile de ecuații: $x + y = 1; x + 5y - 17 = 0; 3x - y = 3$.