

-Se numesc **ecuații exponențiale**, ecuațiile care conțin necunoscuta la exponent.

-Metode de rezolvare: în rezolvarea ecuațiilor exponențiale se utilizează proprietatea de injectivitate a funcției exponențiale :

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y, a \neq 1$$



► ecuația de forma $a^{f(x)} = b, a > 0, a \neq 1$

- dacă $b \leq 0$, ecuația nu are soluții
- dacă $b > 0, b = a^r \Rightarrow a^{f(x)} = a^r \Leftrightarrow f(x) = r \Rightarrow S$
- dacă $b > 0, b \neq a^r \Rightarrow a^{f(x)} = b \Rightarrow f(x) = \log_a b \Rightarrow S$

► ecuația de forma $a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1$

-se utilizează proprietatea de injectivitate a funcției exponențiale :

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow S$$

► ecuația de forma $\alpha a^{2f(x)} + \beta a^{f(x)} + \gamma = 0, a > 0, a \neq 1$

-se notează $a^{f(x)} = t$ și se ține seama de faptul că $t > 0$.

Exerciții rezolvate

1) Să se determine soluțiile reale ale ecuației $2^{x+3} = 16^x$

Rezolvare: $2^{x+3} = (2^4)^x \Leftrightarrow 2^{x+3} = 2^{4x} \Leftrightarrow x+3 = 4x \Leftrightarrow 3 = 3x \Leftrightarrow x = 1$. Deci $S = \{1\}$

(am folosit $(a^p)^q = a^{pq}$ și proprietatea de injectivitate a funcției exponențiale: $\forall x_1, x_2 \in D$, cu $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$)

2) Să se determine soluțiile reale ale ecuației $2^{x+2} + 2^x + 2^{x-1} = 22$

Rezolvare: $2^{x+2} + 2^x + 2^{x-1} = 22$

$$\Leftrightarrow 2^x \cdot 2^2 + 2^x + \frac{2^x}{2} = 22 \Leftrightarrow 2^x \left(4 + 1 + \frac{1}{2} \right) = 22 \Leftrightarrow 2^x = 22 : \frac{11}{2} \Leftrightarrow 2^x = \frac{22}{1} \cdot \frac{2}{11} \Leftrightarrow 2^x = 2^2$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Deci $S = \{2\}$. Am folosit $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$ și $a^{p-q} = \frac{a^p}{a^q}$ și proprietatea de injectivitate a funcției exponențiale.

3) Să se determine soluțiile reale ale ecuației $4^{x+1} - 3 \cdot 2^x - 1 = 0$

Rezolvare: $4^{x+1} - 3 \cdot 2^x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (2^2)^{x+1} - 3 \cdot 2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} \cdot 2^2 - 3 \cdot 2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 \cdot 4 - 3 \cdot 2^x - 1 = 0$$

$$\text{Notăm } 2^x = t \Rightarrow 4t^2 - 3t - 1 = 0 ; a = 4, b = -3, c = -1, \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 25$$

$$t_1 = \frac{3+5}{8} \Leftrightarrow t_1 = 1, t_2 = \frac{3-5}{8} \Leftrightarrow t_2 = -\frac{1}{4}$$

$$t_1 = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow 2^x = 2^0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

$$t_2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow 2^x = -\frac{1}{4} \text{ această ecuație nu are soluție pentru că } 2^x > 0 \text{ iar } -\frac{1}{4} < 0$$

Deci $S = \{0\}$. Am folosit $(a^p)^q = a^{pq}$ și $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$ și proprietatea de injectivitate a funcției exponențiale.

4) Să se determine soluțiile reale ale ecuației $2 \cdot 25^x - 4^x = 10^x$

Rezolvare: $2 \cdot 25^x - 4^x = 10^x \Leftrightarrow 2 \cdot (5^2)^x - (2^2)^x - (2 \cdot 5)^x = 0$

$$2 \cdot (5^x)^2 - (2^x)^2 - 2^x \cdot 5^x = 0 / : (2^x)^2 \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{5}{2}\right)^x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\left(\frac{5}{2} \right)^x \right)^2 - \left(\frac{5}{2} \right)^x - 1 = 0, \text{ notăm } \left(\frac{5}{2} \right)^x = t$$

$$\Rightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 ; a = 2, b = -1, c = -1, \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 9$$

$$t_1 = \frac{1+3}{4} \Leftrightarrow t_1 = 1, t_2 = \frac{1-3}{4} \Leftrightarrow t_2 = -\frac{1}{2}$$

$$t_1 = 1 \Rightarrow \left(\frac{5}{2} \right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2} \right)^x = \left(\frac{5}{2} \right)^0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

$$t_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{5}{2} \right)^x = -\frac{1}{2} \text{ nu are soluție}$$

Deci $S = \{0\}$. Am folosit $(a^p)^q = a^{pq}$ și $\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b} \right)^p$ și proprietatea de injectivitate a funcției exponențiale.

Exerciții propuse

1. Să se determine soluțiile reale ale ecuațiilor:

a) $2^{x+3} = 16$; b) $3^{2x-1} = 81$; c) $5^{-x+4} = 125$; d) $2^{x^2+3x} = 16$; e) $(0,5)^{-x^2+3} = 0,25$;

f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \sqrt{3}$

2. Să se determine soluțiile reale ale ecuațiilor

a) $2^{x+2} + 2^x + 2^{x-1} = 22$; b) $3^{x+2} + 3^{x+1} = 108$; c) $2^{2x+3} + 2^{2x} = 36$; d) $7^{x+1} + 7^{x-1} = 350$

3. Să se determine soluțiile reale ale ecuațiilor

a) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$; b) $4^{x+1} - 3 \cdot 2^x - 1 = 0$; c) $36^x - 42 \cdot 6^x + 216 = 0$;

d) $5 \cdot 5^{2\sqrt{x}} - 26 \cdot 5^{\sqrt{x}} + 5 = 0$

4. Să se determine soluțiile reale ale ecuațiilor

a) $5 \cdot 4^x - 11 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$; b) $2 \cdot 49^x = 35^x + 25^x$; c) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$

5. Să se determine soluțiile reale ale ecuațiilor

a) $2^{x-3} = 3$; b) $5^{-2x+3} = 7$; c) $2^{x-3} = 3^{x-3}$; d) $25^{x+1} = 7^{2x+2}$; e) $2^x + 3^x = 5^x$; f) $3^x + 5^x = 8^x$

6. Găsiți exerciții asemănătoare în variantele de bacalaureat și rezolvați-le.