

Breviar theoretic

-Se numesc **ecuații iraționale**, ecuațiile care conțin necunoscuta sub semnul radical.

-Metoda obișnuită de rezolvare a ecuațiilor iraționale constă în eliminarea radicalilor prin diferite transformări, reducându-le la ecuații raționale echivalente; acest lucru se face prin ridicări la putere astfel încât să dispară radicalii.

Înainte de a trece la rezolvarea efectivă a ecuației, se pun condiții de existență a radicalilor pentru a obține D – mulțimea / domeniul de existență a ecuației, respectiv a soluțiilor; radicalii de ordin par au sens numai pentru numere pozitive. Se izolează radicalii (dacă este posibil) pentru a se putea ridica la putere și a se obține o ecuație mai simplă. Se ține cont de faptul că cei doi membri ai unei ecuații trebuie să aibă același semn (la ecuațiile cu radicali de ordin par).

Se rezolvă ecuația obținută, se verifică dacă numărul / numerele găsite aparțin domeniului de existență a soluțiilor D , după care se scrie S - soluția ecuației.



Exercițiul 1 model

Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\sqrt{-x+2} = 3$.

Soluție:

$$\text{Condiție: } -x+2 \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -2 \mid :(-1) \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow x \in (-\infty; 2] = D$$

$$\text{Rezolvare: } \sqrt{-x+2} = 3 \mid ^2 \Rightarrow -x+2 = 9 \Leftrightarrow -x = 7 \mid :(-1) \Rightarrow x_1 = -7$$

$$\text{Verificare: } -7 \in D \text{ deci } S = \{-7\}$$

Exercițiul 1 propus spre rezolvare:

Să se determine soluțiile reale ale ecuațiilor:

$$\text{a) } \sqrt{-x+7} = 2; \text{ b) } \sqrt{x-3} = 4; \text{ c) } \sqrt{2x+1} = -2; \text{ d) } \sqrt{3x-4} = 5$$

Exercițiul 2 model

Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\sqrt{3x-5} = x-1$.

Soluție:

$$\text{Condiții: } \begin{cases} 3x-5 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{3} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\frac{5}{3}; +\infty\right) \\ x \in [1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{5}{3}; +\infty\right) = D$$

$$\text{Rezolvare: } \sqrt{3x-5} = x-1 \mid ^2 \Rightarrow 3x-5 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$$

$$\text{Verificare: } 2; 3 \in D \Rightarrow S = \{2; 3\}.$$

Exercițiul 2 propus spre rezolvare:

Să se determine soluțiile reale ale ecuațiilor:

$$\text{a) } \sqrt{x+2} = x; \text{ b) } \sqrt{x+1} = 5-x; \text{ c) } \sqrt{x^2-4x+4} = x-1; \text{ d) } \sqrt{3x+4} = 2\sqrt{x};$$

$$\text{e) } \sqrt{x^2+1} = 2$$

Exercițiul 3 model

Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\sqrt{1-x} - \sqrt{x+19} = 2$.

Soluție:

$$\text{Condiții: } \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x+19 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \\ x \in [-19; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-19; 1] = D$$

$$\text{Rezolvare: } \sqrt{1-x} - \sqrt{x+19} = 2 \quad / \quad ^2 \Rightarrow 1-x - 2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x+19} + x+19 = 4$$

$$-2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x+19} = 4 - 20$$

$$-2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x+19} = -16 \quad / : (-2)$$

$$\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x+19} = 8 \quad / \quad ^2$$

$$(1-x)(x+19) = 64$$

$$\Rightarrow -x^2 - 18x + 19 - 64 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 18x + 45 = 0$$

$$a = 1, b = 18, c = 45, \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 324 - 180 \Leftrightarrow \Delta = 144$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-18 + 12}{2} \Leftrightarrow x_1 = -3; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-18 - 12}{2} \Leftrightarrow x_2 = -15$$

$$-3 \in D, \sqrt{1-(-3)} - \sqrt{-3+19} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4} - \sqrt{16} = 2 \Leftrightarrow -2 = 2(F) \Rightarrow -3 \text{ nu este soluție}$$

(verificare)

$$-15 \in D, \sqrt{1-(-15)} - \sqrt{-15+19} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{16} - \sqrt{4} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2(A) \Rightarrow -15 \text{ este soluție (verificare)}$$

$$\text{Deci } S = \{-15\}.$$

Exercițiul 3 propus spre rezolvare:

$$\text{a) } \sqrt{x+6} - \sqrt{x-5} = 2; \quad \text{b) } \sqrt{x-2} + \sqrt{x-5} = 3$$

Exercițiul 4 model

Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\sqrt[3]{x^3 - 2x + 5} = x$.

$$\text{Rezolvare: } \sqrt[3]{x^3 - 2x + 5} = x \quad |^3 \Rightarrow x^3 - 2x + 5 = x^3 \Leftrightarrow -2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5}{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow S = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

Exercițiul 4 propus spre rezolvare:

$$\text{a) } \sqrt[3]{x^3 + x + 3} = x; \quad \text{b) } \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 5x + 4} = x; \quad \text{c) } \sqrt[3]{2x-7} = \sqrt[3]{x+3}$$