

Breviar teoretic

-Se numesc **ecuații logaritmice**, ecuațiile care conțin necunoscuta la baza sau argumentul unor logaritmi.

-**Metode de rezolvare:** se utilizează proprietatea de injectivitate a funcției logaritmice

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$$



► ecuații de forma $\log_a f(x) = b, a > 0, a \neq 1$

- ✿ se pune condiția de existență a logaritmului $f(x) > 0$, pe care o rezolvăm și obținem D – domeniul în care ecuația poate avea soluții
- ✿ se rezolvă ecuația : $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$ (conform definiției logaritmului)
- ✿ se verifică dacă numărul / numerele obținute aparțin lui D , obținându-se astfel soluția ecuației S .

► ecuații de forma $\log_a f(x) = \log_a g(x), a > 0, a \neq 1$

- se pun condițiile de existență a logaritmilor $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$, sistem pe care îl rezolvăm și obținem D – domeniul în care ecuația poate avea soluții
- se rezolvă ecuația : $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ (conform proprietății de injectivitate a funcției logaritmice)
- se verifică dacă numărul / numerele obținute aparțin lui D , obținându-se astfel soluția ecuației S .

► ecuații de forma $\alpha \log_a^2 f(x) + \beta \log_a f(x) + \gamma = 0, a > 0, a \neq 1$

- se pun condițiile de existență a logaritmilor $f(x) > 0$, pe care o rezolvăm și obținem D – domeniul în care ecuația poate avea soluții
- se rezolvă ecuația : $\alpha \log_a^2 f(x) + \beta \log_a f(x) + \gamma = 0$ utilizând substituția $\log_a f(x) = t$ (se obține o ecuație de gradul II, care va avea soluțiile t_1, t_2 dacă $\Delta \geq 0$ și nu va avea soluții reale dacă $\Delta < 0$; în cazul când există soluțiile t_1, t_2 , mergem mai departe astfel:
 $\log_a f(x) = t_1 \Leftrightarrow f(x) = a^{t_1} \Rightarrow x; \log_a f(x) = t_2 \Leftrightarrow f(x) = a^{t_2} \Rightarrow x$
- se verifică dacă numărul / numerele obținute aparțin lui D , obținându-se astfel soluția ecuației S .

► ecuații de forma $\log_{g(x)} f(x) = b, a > 0, a \neq 1$

- ✿ se pun condițiile de existență a logaritmului $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$, sistem pe care îl rezolvăm și obținem D – domeniul în care ecuația poate avea soluții
- ✿ se rezolvă ecuația : $\log_{g(x)} f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = g(x)^b$ (conform definiției logaritmului)

 se verifică dacă numărul / numerele obținute aparțin lui D , obținându-se astfel soluția ecuației S .

Exerciții rezolvate

1. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x-1) = \log_2 3$

Rezolvare : $\log_2(x-1) = \log_2 3$

Condiție : $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in (1; +\infty) = D$

$\log_2(x-1) = \log_2 3 \Leftrightarrow x-1 = 3 \Leftrightarrow x = 4 \in D \Rightarrow S = \{4\}$

Am aplicat proprietatea de injectivitate a funcției logaritmice

(funcția logaritmică este injectivă deci $\forall x_1, x_2 \in D$, cu $\log(x_1) = \log(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$)

2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $3\log_3^2 x - 8\log_3 x - 3 = 0$

Rezolvare : $3\log_3^2 x - 8\log_3 x - 3 = 0$

Condiție : $x > 0 \Leftrightarrow x \in (0; +\infty) = D$

Notăm $\log_3 x = t \Rightarrow 3t^2 - 8t - 3 = 0$ ecuație de gradul II

$a = 3, b = -8, c = -3, \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 64 + 36 \Leftrightarrow \Delta = 100$

$t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow t_1 = \frac{8+10}{6} \Leftrightarrow t_1 = 3; t_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow t_2 = \frac{8-10}{6} \Leftrightarrow t_2 = -\frac{1}{3}$

$t_1 = 3 \Rightarrow \log_3 x = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 3^3 \Leftrightarrow x_1 = 3^3 \Leftrightarrow x_1 = 27$

$t_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow \log_3 x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 3^{-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x_2 = 3^{-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 27 \in D \Rightarrow S = \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{3}}; 27 \right\}$

3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$

Rezolvare : $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$

Condiții : $\begin{cases} x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; +\infty) \\ x \in (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; +\infty) = D$

$\log_2 x + \log_2(x-1) = 1 \Leftrightarrow \log_2 x(x-1) = 1 \Leftrightarrow \log_2 x(x-1) = \log_2 2 \Leftrightarrow x(x-1) = 2$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$a = 1, b = -1, c = -2, \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 9$

$x_1 = \frac{1+3}{2} \Leftrightarrow x_1 = 2; x_2 = \frac{1-3}{2} \Leftrightarrow x_2 = -1$

$2 \in D$ deci este soluție a ecuației

$-1 \notin D$ deci nu este soluție a ecuației $\Rightarrow S = \{2\}$.

Am folosit : $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$ și proprietatea de injectivitate a funcției logaritmice.

4. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x+2) = -1$

Rezolvare : $\log_2(x+2) = -1$

Condiție : $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2; +\infty) = D$

$$\log_2(x+2) = -1 \Leftrightarrow \log_2(x+2) = \log_2 2^{-1} \Rightarrow x+2 = 2^{-1} \Leftrightarrow x = -2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \in D$$

Deci $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$. Am folosit proprietatea de injectivitate a funcției logaritmice.

5. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $\lg^2 x - 6\lg x + 5 = 0$

Rezolvare : $\lg^2 x - 6\lg x + 5 = 0$

Condiție : $x > 0 \Leftrightarrow x \in (0; +\infty) = D$

Notăm $\lg x = t \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0$

$$a = 1, b = -6, c = 5, \Delta = 16 \Rightarrow t_1 = \frac{6+4}{2} \Leftrightarrow t_1 = 5, t_2 = \frac{6-4}{2} \Leftrightarrow t_2 = 1$$

$$t_1 = 5 \Rightarrow \lg x = 5 \Leftrightarrow \lg x = \lg 10^5 \Rightarrow x_1 = 10^5 \in D$$

$$t_2 = 1 \Rightarrow \lg x = 1 \Leftrightarrow \lg x = \lg 10 \Rightarrow x_2 = 10 \in D$$

Deci $S = \{10; 10^5\}$

Am folosit proprietatea de injectivitate a funcției logaritmice.

Exerciții propuse

1. Să se determine soluțiile reale ale ecuațiilor

a) $\log_2(x-1) = 1$; b) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+1) = 3$; c) $\log_5(-x+3) = 2$; d) $\log_2(x-1) = \log_2 3$;

e) $\log_2(x^2 - 3x) = \log_2(5x+7)$; f) $\log_2(x^2 - 2x) = 3$; g) $\log_5(x^2 - 7x + 13) = \log_5(2x+13)$;

h) $\log_5(5x^2 - 24x) = \log_5(2x-5)$

2. Să se determine soluțiile reale ale ecuațiilor

a) $3\log_3^2 x - 8\log_3 x - 3 = 0$; b) $\log_x(x+2) = \log_x(3-x)$; c) $\lg^2 x + 6\lg x + 5 = 0$;

d) $3\lg^2 x - 5\lg x + 2 = 0$; e) $4\log_3^2(x-3) + \log_3(x-3) = 5$;

f) $\log_2^2(x+1) - 4\log_2(x+1) + 3 = 0$; g) $\log_{0,1}^2(3x+1) - 10\log_{0,1}(3x+1) + 9 = 0$

3. Să se determine soluțiile reale ale ecuațiilor

a) $\lg(x^2 - 6x + 5) - \lg(3-x) = \lg 3$; b) $\lg(2x+6) - 2\lg(2x-3) = 1$;

c) $\lg(x-5) + \lg(x+4) = \lg 2 + \lg 5$; d) $\log_3(6-x) + \log_3 \sqrt{4-x} = 1$;

e) $\frac{1}{2}\log_2(x^2 + x + 2) - \log_2(3x-2) = 1$; f) $\frac{1}{1+\lg x} + \frac{3}{3+\lg x} = 2$

4. Găsiți în variantele de bacalaureat exerciții asemănătoare și rezolvați-le.