

Fișă de lucru – cls. IX – liceu tehnologic, Prof. Cornelia Mestecan
Modalități de calcul a lungimii unui segment și a măsurii unui unghi: teorema sinusurilor și teorema cosinusului.

Fie $\triangle ABC$ oarecare

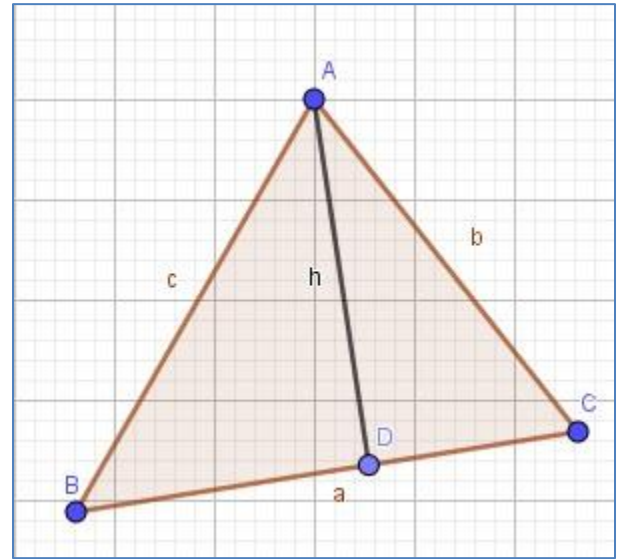
cu laturile $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ și

înălțimea h coborâtă din vârful A pe latura a ,

A, B, C – măsurile unghiurilor triunghiului,

R – raza cercului circumscris triunghiului,

r – raza cercului înscris triunghiului.



-teorema sinusurilor: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

-teorema cosinusului:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

de unde putem afla și $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

TEMĂ:

-scrieți relațiile și pentru laturile b și c , respectiv pentru $\cos B, \cos C$

-aria triunghiului:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ unde } p = \frac{a+b+c}{2};$$

$$S = \frac{ac \sin B}{2} = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{bc \sin A}{2}$$

$$\text{Sau } S = \frac{\text{baza} \cdot \text{înălțimea}}{2} \text{ sau } S = \frac{abc}{4R} = rp$$

(sunt formule alternative care se aplică în cazul dat de problemă)

-dacă $\triangle ABC$ este echilateral $a=b=c$ deci $p = a+b+c = 3a$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Exerciții rezolvate

1. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=5$, $AC=2\sqrt{2}$, $BC=3$. Să se calculeze $\cos B$.

Rezolvare: folosim teorema cosinusului: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ care mai poate fi scrisă și $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$;

noi cunoaștem $AB=5=c$, $AC=2\sqrt{2}=b$, $BC=3=a$

$$\text{deci } (2\sqrt{2})^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos B \Leftrightarrow 8 = 9 + 25 - 30 \cos B \Leftrightarrow \cos B = \frac{26}{30} \Leftrightarrow \cos B = \frac{13}{15}$$

2. Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că $AB=3$, $AC=5$, $m(A)=30^\circ$

Rezolvare: cunoaștem că aria triunghiului este $S = \frac{ac \sin B}{2} = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{bc \sin A}{2}$, care se potrivește în

problema noastră. Știm că $AB=3=c$, $AC=5=b$, $m(A)=30^\circ$ deci $S = \frac{bc \sin A}{2}$

prin urmare $S = \frac{3 \cdot 5 \cdot \sin(30^\circ)}{2} = \frac{15 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{15}{4}$.

3. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC , știind că $AC = 5, m(B) = 60^\circ$.

Rezolvare: cunoaștem teorema sinusurilor: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, în problema noastră putem folosi

$$\frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{5}{\sin 60^\circ} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{5}{2 \cdot \sin 60^\circ} \Leftrightarrow R = \frac{5}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow R = \frac{5}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow R = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

4. Se consideră triunghiul ABC cu aria egală cu 7, cu $AC = 5$ și $BC = 6$. Să se calculeze $\sin C$.

Rezolvare: cunoaștem că aria triunghiului este $S = \frac{ac \sin B}{2} = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{bc \sin A}{2}$. În cazul nostru, știm

$$AC = 5 = b \text{ și } BC = 6 = a, \text{ deci } S = \frac{ab \sin C}{2} \Leftrightarrow 7 = \frac{5 \cdot 6 \cdot \sin C}{2} \Rightarrow \sin C = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 6} \Rightarrow \sin C = \frac{7}{15}$$

5. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC , știind că $AB = 4, AC = 7, m(A) = 60^\circ$.

Rezolvare: folosim teorema cosinusului: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$c = AB = 4, b = AC = 7, m(A) = 60^\circ \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$\Leftrightarrow BC^2 = 16 + 49 - 56 \cos 60^\circ \Leftrightarrow BC^2 = 65 - 56 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow BC^2 = 37 \Rightarrow BC = \sqrt{37}$$

$$\text{Perimetrul}_{\triangle ABC} = AB + AC + BC \Leftrightarrow \text{Perimetrul}_{\triangle ABC} = 11 + \sqrt{37}$$

6. Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că $AB = 10, BC = 13, m(B) = 150^\circ$.

Rezolvare: cunoaștem că aria triunghiului este $S = \frac{ac \sin B}{2}$, $a = BC = 13, c = AB = 10$

$$\sin B = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \text{ rezultă că } S = \frac{13 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{13 \cdot 5}{2} = \frac{65}{2}.$$

7. Să se calculeze aria triunghiului echilateral ABC știind că are lungimea înălțimii egală cu $5\sqrt{3}$.

Rezolvare: știm că $h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ și $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, deci $5\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 10$ și $S = \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{100\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$

8. Să se calculeze lungimea laturii AB a triunghiului ABC știind că

$$BC = \sqrt{3}, m(BCA) = 45^\circ, m(BAC) = 60^\circ$$

Rezolvare: putem folosi teorema sinusurilor: $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ unde

$$a = BC = \sqrt{3}, C = m(BCA) = 45^\circ, A = m(BAC) = 60^\circ, \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

9. Triunghiul ABC este dreptunghic în B , iar raza cercului circumscris triunghiului este $R=5$. Să se calculeze lungimea laturii AC .

Rezolvare: triunghiul ABC este dreptunghic în B deci AC este ipotenuza, raza cercului circumscris este jumătate din ipotenuză, rezultă că $AC = 2R = 2 \cdot 5 = 10$.

Temă

- 1) Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 5, AC = 5\sqrt{2}, BC = 4$. Să se calculeze $\cos C$.
- 2) Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că $BC = 3, AC = 5, m(C) = 60^\circ$.
- 3) Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC , știind că $AB = 4, m(C) = 45^\circ$.
- 4) Se consideră triunghiul ABC cu aria egală cu 9, cu $AB = 5$ și $BC = 6$. Să se calculeze $\sin B$.
- 5) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC , știind că $AB = 5, BC = 8, m(B) = 60^\circ$.
- 6) Să se calculeze aria triunghiului ABC știind că $AB = 10\sqrt{2}, BC = 12, m(B) = 135^\circ$.
- 7) Să se calculeze aria triunghiului echilateral ABC știind că are lungimea înălțimii egală cu $7\sqrt{3}$.
- 8) Să se calculeze lungimea laturii AB a triunghiului ABC știind că $BC = \sqrt{6}, m(BCA) = 60^\circ, m(BAC) = 45^\circ$.
- 9) Triunghiul ABC este dreptunghic în C , iar raza cercului circumscris triunghiului este $R=7$. Să se calculeze lungimea laturii AB .