

Funcția de gradul II. Grafic și monotonie

Def. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ se numește funcție de gradul II.

Forma canonică a funcției de gradul II

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

Exemplu:

Să se scrie în forma canonică funcția: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + x - 3$

$$f(x) = 2x^2 + x - 3$$

$$a = 2; b = 1; c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25$$

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

deci forma canonică este

$$f(x) = 2 \left(x + \frac{1}{2 \cdot 2} \right)^2 + \frac{-25}{4 \cdot 2} \Rightarrow f(x) = 2 \left(x + \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{25}{8}$$

Exercițiu propuse spre rezolvare:

Scrieți sub forma canonică funcțiile: a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 3x + 5$;

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 7$

Graficul funcției este $G_f = \left\{ (x; y) \mid y = f(x), x \in \mathbb{R} \right\}$ și reprezentarea sa geometrică în reperul cartezian xOy se numește **Parabolă**.

Reprezentarea grafică a funcției de gradul II

1. **Intersecția cu axa Ox:** $G_f \cap Ox : y = f(x) = 0$

Acest lucru înseamnă că avem de rezolvat ecuația $ax^2 + bx + c = 0$

Scriem coeficienții $a =$, $b =$, $c =$ și calculăm $\Delta = b^2 - 4ac$

Apar următoarele cazuri:

Cazul a.

$$\Delta > 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow G_f \cap Ox = \{A(x_1; 0), B(x_2; 0)\}$$

Cazul b.

$$\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow G_f \cap Ox = \left\{ A\left(\frac{-b}{2a}; 0\right) \right\}$$

Cazul c.

$$\Delta < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R} \Rightarrow G_f \cap Ox = \Phi$$

2. Intersecția cu axa Oy :

$$G_f \cap Oy: x = 0 \Rightarrow y = f(0) = c \Rightarrow G_f \cap Oy = \{C(0; c)\}$$

3. **Vârful parabolei:** $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Vârful parabolei are rol important în studiul monotoniei funcției de gradul II:

- dacă $a > 0$ vârful este **punctul de minim** al funcției iar **valoarea minimă a funcției** este $y_{\min} = y_V = -\frac{\Delta}{4a}$
- dacă $a < 0$ vârful este **punctul de maxim** al funcției iar **valoarea maximă a funcției** este $y_{\max} = y_V = -\frac{\Delta}{4a}$

4. Se completează tabelul de variație a funcției

5. Se fixează în reperul cartezian xOy punctele obținute și apoi se trasează cu linie continuă parabola.

Exemplu:

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x + 3$

Intersecția cu axa Ox :

$$G_f \cap O_{x: y = f(x) = 0}$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$a = 1, b = 4, c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \cdot 1}$$

$$x_2 = \frac{-4+2}{2} = -1$$

$$\text{Deci } G_f \cap O_X = \{A(-3;0), B(-1;0)\}$$

Intersecția cu axa Oy :

$$G_f \cap Oy : x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 3$$

$$G_f \cap Oy = \{C(0;3)\}$$

Vârful parabolei: $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow V\left(-\frac{4}{2 \cdot 1}; -\frac{4}{4 \cdot 1}\right) \Rightarrow V(-2; -1)$

care este punct de minim ($a=1>0$)

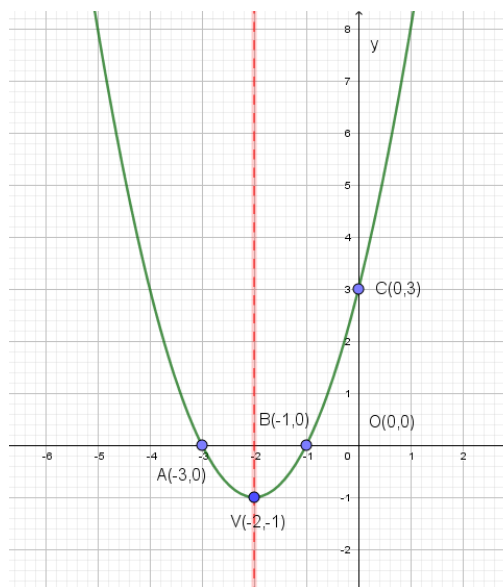
Tabelul de variație:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+\infty$				
$f(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$
					$\min$					

Reprezentarea grafică:

Observații:

- ✓ **axa de simetrie** a parabolei este:
 $x = -2$
- ✓ **vârful parabolei** este: punct de minim



Monotonia funcției de gradul II

Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Avem două cazuri:

1. $a > 0$ atunci $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ este punct de minim deci funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ și este strict crescătoare pe intervalul $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, cele două intervale se numesc **intervale de monotonie**.
2. $a < 0$ atunci $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ este punct de maxim deci funcția f este strict crescătoare pe intervalul $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ și este strict descrescătoare pe intervalul $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

Deci intervalele de monotonie ale funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 3$ sunt:

$x \in (-\infty; -2]$ funcția f este strict descrescătoare

$x \in [-2; +\infty)$ funcția f este strict crescătoare

Exerciții propuse spre rezolvare:

Reprezentați grafic funcția și stabiliți intervalele de monotonie dacă

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x - 4$; 2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 8$; 4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 - x + 2$

Semnul funcției de gradul II

Funcția de gradul II este $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

1. Când $\Delta > 0$ funcția are două rădăcini reale și diferite, acestea fiind de fapt soluțiile ecuației $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$, x_1, x_2

Le scriem în **tabelul de semn** în ordine crescătoare

$$\begin{aligned}
 a &= 1, b = -5, c = 4 \\
 \Delta &= b^2 - 4ac \\
 \Delta &= (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 x_1 &= \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2 \cdot 1} & x_2 &= \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \\
 x_1 &= \frac{5 - 3}{2} = \frac{2}{2} = 1 & x_2 &= \frac{5 + 3}{2} = 4
 \end{aligned}$$

Facem **tabelul de semn**. Observăm că $a = 1 > 0$ deci funcția are semnul lui a , adică $+$ înafara rădăcinilor și semnul opus lui a adică $-$ între rădăcini

x	$-\infty$				1				4			$+\infty$
$f(x)$		+		+	0	-		-	0	+	+	+

Din tabel tragem concluzia că

$$f(x) > 0 \text{ pentru } x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$$

$$\text{și } f(x) < 0 \text{ pentru } x \in (1; 4)$$

Exerciții propuse spre rezolvare:

1. Să se stabilească semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2$
2. Să se stabilească semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 5x - 6$
3. Să se stabilească semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 6x - 9$
4. Să se stabilească semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 - 2x - 1$
5. Să se stabilească semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^2 + 4x + 1$
6. Să se stabilească semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - x + 7$
7. Să se stabilească semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 4x - 5$