

Logaritmul unui număr real pozitiv

Definiție

Fie $a > 0, a \neq 1, N > 0$. **Logaritmul numărului real pozitiv N în baza a** este exponentul/**puterea** la care trebuie ridicat numărul a pentru a obține numărul N și se notează $\log_a N$.

Exemplu: $\log_2 8 = 3$ deoarece $2^3 = 8$

Reținem :

$$1. \log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N, a > 0, a \neq 1, N > 0$$

Exerciții în clasă:

Calculați $\log_2 64 = ?$ $\log_3 3 = ?$ $\log_5 1 = ?$

$$\begin{array}{r|l}
 64 & 2 \\
 32 & 2 \\
 16 & 2 \\
 8 & 2 \\
 4 & 2 \\
 2 & 2 \\
 1 & 1
 \end{array}
 \quad
 \log_2 64 = 6 \quad \log_3 3 = 1 \quad \log_5 1 = 0$$

$$\log_3 243 = 5
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 243 & 3 \\
 81 & 3 \\
 27 & 3 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 & 1
 \end{array}$$

Reținem:

2. $\log_a a^x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$

3. $\log_a a = 1$, oricare ar fi $a > 0, a \neq 1$

4. $\log_a 1 = 0$, oricare ar fi $a > 0, a \neq 1$

noteaza

5. $\log_{10} N \stackrel{\text{noteaza}}{=} \lg N$ și se numește **logaritm zecimal**

6. $\log_e N \stackrel{\text{noteaza}}{=} \ln N$ și se numește **logaritm natural**, unde $e = 2.71828 \dots$ număr irațional

Proprietățile logaritmilor:

Pentru orice $A > 0, B > 0, a > 0, a \neq 1, m \in R, n \in \{2, 3, \dots\}$ au loc relațiile

$$1. \log_a A \cdot B = \log_a A + \log_a B$$

$$2. \log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

$$3. \log_a A^m = m \log_a A$$

$$4. \log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_a A$$

Formula de schimbare a bazei logaritmului

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Exerciții în clasă:

$$\log_3 54 = \log_3 2 \cdot 3^3 = \log_3 2 + \log_3 3^3 = \log_3 2 + 3 \log_3 3 = \log_3 2 + 3$$

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \log_4 \frac{24}{600} &= \log_4 24 - \log_4 600 = \log_4 4 \cdot 2 \cdot 3 \\ &\quad - \log_4 4 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 3 = (\log_4 4 + \log_4 2 + \log_4 3) \\ &\quad - (\log_4 4 + \log_4 5^2 + \log_4 2 + \log_4 3) \\ &= 1 + \log_4 2 + \log_4 3 - 1 \\ &\quad - 2 \log_4 5 - \log_4 2 - \log_4 3 = -2 \log_4 5 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 4 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 600 & 4 \\ 150 & 5 \\ 30 & 5 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\log_3 \frac{18}{175} = \log_3 18 - \log_3 175 = \log_3 3^2 \cdot 2 - \log_3 5^2 \cdot 7$$

$$\begin{aligned} &= (\log_3 3^2 + \log_3 2) - (\log_3 5^2 + \log_3 7) \\ &= 2\log_3 3 + \log_3 2 - 2\log_3 5 - \log_3 7 \\ &= 2 + \log_3 2 - 2\log_3 5 - \log_3 7 \end{aligned}$$

$$\log_5 \sqrt{250} = \frac{1}{2} \log_5 250 = \frac{1}{2} \log_5 5^3 \cdot 2 = \frac{1}{2} (\log_5 5^3 + \log_5 2) = \frac{1}{2} (3 + \log_5 2)$$

$$\begin{array}{r|l} 250 & 5 \\ 50 & 5 \\ 10 & 5 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Proprietățile logaritmilor dau **operațiile cu logaritmi**

1. $\log_a A + \log_a B = \log_a A \cdot B$
2. $\log_a A - \log_a B = \log_a \frac{A}{B}$
3. $m \log_a A = \log_a A^m$
4. $\frac{1}{n} \log_a A = \log_a \sqrt[n]{A}$

Exerciții în clasă:

1. Să se aducă la o formă mai simplă:

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_4 7 + \log_4 8 - \log_4 14 &= \log_4 7 \cdot 8 - \log_4 14 = \log_4 \frac{56}{14} = \\ &= \log_4 4 = 1 \end{aligned}$$

Observatie: $\log_{10} a = \lg a$ logaritm zecimal $\lg 10 = 1$, $\lg 1 = 0$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lg 16 + \lg 15 + \lg 45 - \lg 108 &= \lg 16 \cdot 15 \cdot 45 - \lg 108 = \\ &= \lg \frac{16 \cdot 15 \cdot 45}{108} = \lg \frac{4 \cdot 15 \cdot 45}{27} = \lg \frac{4 \cdot 5 \cdot 5}{1} = \lg 100 = \lg 10^2 = 2 \end{aligned}$$

2. Să se calculeze logaritmi zecimali ai numerelor : 0.0001 ; $\sqrt{100000}$; 10^{-7} .

$$\lg 0.0001 = \lg \frac{1}{10000} = \lg \frac{1}{10^4} = \lg 10^{-4} = -4 \lg 10 = -4$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n} ; \quad \frac{1}{2} = 2^{-1} ; \quad 3^{-4} = \frac{1}{3^4} ; \quad 5^{-7} = \frac{1}{5^7}$$

$$\frac{3}{2^4} = 3 \cdot \frac{1}{2^4} = 3 \cdot 2^{-4}$$

$c \cdot \frac{x}{y} = \frac{c \cdot x}{y}$ înmulțirea fracției cu un număr $\neq$ introducerea întregului în fracție.

$$\lg \sqrt{100000} = \frac{1}{2} \lg 100000 = \frac{1}{2} \lg 10^5 = \frac{5}{2} \lg 10 = \frac{5}{2}$$

Exerciții temă:

1. Să se calculeze : $\log_3 243$; $\log_2 128$; $\log_3 72$; $\log_4 \sqrt{48}$; $\log_5 \frac{1}{625}$

2. Să se aducă la o formă mai simplă:

c) $\log_3 11 + \log_3 15 - \log_3 55$

d) $\lg 24 + \lg 25 + \lg 3 - \lg 18$

3. Să se calculeze logaritmi zecimali ai numerelor: 0.00001 ; $\sqrt{1000}$; 10^{-9} .

Exerciții în clasă

1. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care sunt definiți logaritmi:

a) $\log_2(-x + 6)$;

$$C: -x + 6 > 0 \Rightarrow -x > -6 \mid : (-1) \Rightarrow x < 6 \Rightarrow x \in (-\infty; 6) = D$$

D -domeniu de definiție

$$\log_2(2x + 7)$$

$$C: 2x + 7 > 0 \Rightarrow 2x > -7 \mid : (2) \Rightarrow x > -\frac{7}{2} \Rightarrow x \in \left(-\frac{7}{2}; +\infty\right) = D$$

$$b) \log_3(-2x^2 + 5x - 3)$$

$$C: -2x^2 + 5x - 3 > 0 \text{ atasam ecuatia de gradul II}$$

$$-2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$\Delta = 1 > 0 \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 1}{-4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 1}{-4} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$-2x^2 + 5x - 3$	-----	0	++++++	0 -----

$$D = \left(1; \frac{3}{2}\right)$$

Exerciții în clasă

1. Să se determine $x \in R$ pentru care sunt definiți logaritmi:

$$a) \log_3(x^2 + 2); b) \log_3(x^2 - 2)$$

$$a) \log_3(x^2 + 2)$$

$$C: x^2 + 2 > 0$$

$$\text{Atașăm ecuația de gradul II: } x^2 + 2 = 0$$

$$a = 1, b = 0, c = 2 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -8 < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \notin R$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 + 2$	+++++	+++++

$$S = R = (-\infty; +\infty)$$

$$b) \log_3(x^2 - 2)$$

$$C: x^2 - 2 > 0$$

$$\text{Atașăm ecuația } x^2 - 2 = 0$$

$$a = 1, b = 0, c = -2 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = +8 > 0 \Rightarrow$$

$$x_1, x_2 \in R \text{ și } x_1 \neq x_2$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 + 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 - 2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$x^2 - 2$	+	0	-	0	+

$$S = (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$$

Exerciții pentru acasă:

2. Să se determine $x \in R$ pentru care sunt definiți logaritmi:

a) $\log_5(x - 4)$; b) $\log_2(x^2 + 7)$; c) $\log_3(x^2 - 1)$; d) $\log_3(x^2 + 4x + 3)$

Model de test -logaritmi

1) Folosind proprietățile logaritmilor, să se aducă la o formă mai simplă:

a) $\log_2 15 + \log_2 12 - \log_2 45$; b) $4 \log_5 3 + 3 \log_5 2 - \log_5 72$

$$a) \log_2 15 + \log_2 12 - \log_2 45 = \log_2 15 \cdot 12 - \log_2 45 = \log_2 \frac{15 \cdot 12}{45} = \log_2 4 = 2$$

$$\log_2 2^2 = 2 \underbrace{\log_2 2}_1 = 2$$

$$\log_a A + \log_a B = \log_a A \cdot B ; \log_a A^n = n \log_a A$$

$$\log_a A - \log_a B = \log_a \frac{A}{B} ; \log_a a = 1$$

b) $4 \log_5 3 + 3 \log_5 2 - \log_5 72$

$$\log_a A^n = n \log_a A$$

$$\log_5 3^4 + \log_5 2^3 - \log_5 72 = \log_5 3^4 \cdot 2^3 - \log_5 72 = \log_5 \frac{3^4 \cdot 2^3}{72}$$

$$= \log_5 \frac{81}{9} = \log_5 9 = \log_5 3^2 = 2 \log_5 3$$

$$\log_a A + \log_a B = \log_a A \cdot B$$

$$\log_a A - \log_a B = \log_a \frac{A}{B}$$

2) Calculați :

a) $\log_7 \sqrt{7} \cdot 2401$;

$$\log_a A + \log_a B = \log_a A \cdot B ; \log_a A^n = n \log_a A ; \log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_a A$$

$$\log_7 \sqrt{7} + \log_7 2401 = \frac{1}{2} \underbrace{\log_7 7}_1 + \log_7 7^4 = \frac{1}{2} + 4 \underbrace{\log_7 7}_1 = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

c) $\log_{11} \frac{33}{2}$;

$$\log_{11} 33 - \log_{11} 2 = \log_{11} 11 \cdot 3 - \log_{11} 2 = \underbrace{\log_{11} 11}_1 + \log_{11} 3 - \log_{11} 2$$

$$\log_a A - \log_a B = \log_a \frac{A}{B} ; \log_a A + \log_a B = \log_a A \cdot B$$

c) $\lg 0.1 + \lg 1000$

$$\lg 0.1 \cdot 1000 = \lg 100 = \lg 10^2 = 2 \underbrace{\lg 10}_1 = 2$$

$$\log_a A^n = n \log_a A ; \log_a A + \log_a B = \log_a A \cdot B$$

3) Determinați mulțimea numerelor reale pentru care au sens următorii logaritmi:

a) $\log_{17}(-9x - 15)$; b) $\log_2(-7x^2 + 13x + 2)$