

Mulțimea numerelor reale_recapitulare

Ne amintim că:

1. Mulțimea numerelor naturale este $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ iar $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots, n, \dots\} = \mathbb{N} - \{0\}$
2. Mulțimea numerelor întregi este $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$
3. Mulțimea numerelor rationale este $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0, (x, y) = 1 \right\}$ (unde $(x, y) = 1$ înseamnă că x și y au ca divizor comun doar pe 1)
4. Mulțimea numerelor reale este $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
5. Relația dintre toate aceste mulțimi este: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
6. Un număr este **rațional** dacă se poate scrie ca o fracție zecimală cu un număr finit de zecimale sau cu o infinitate de zecimale care se succed periodic.
7. Un număr este **irațional** dacă se poate scrie ca o fracție zecimală cu o infinitate de zecimale dar care nu se succed periodic. Mulțimea numerelor iraționale se notează cu $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
8. **Mulțimea numerelor raționale reunită cu mulțimea numerelor iraționale formează mulțimea numerelor reale pe care o notăm cu $\mathbb{R}$.**
9. Fie a un număr real pozitiv ($a \geq 0$). Numim rădăcina pătrată a numărului a , sau radicalul de ordinul 2 din a , numărul real pozitiv x care verifică egalitatea $x^2 = a$. Numărul x se notează $\sqrt{a}$
 - Avem deci $x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$, $(\sqrt{a})^2 = a$ și $\sqrt{a^2} = |a|$, pentru orice număr real a pozitiv ($a \geq 0$)
10. $(-x)$ se numește opusul lui x , pentru orice număr real x
11. Operația de scădere este de fapt o adunare $x - y = x + (-y)$
12. $\frac{1}{x}$ se numește inversul lui x , pentru orice număr real $x \neq 0$
13. Operația de împărțire este de fapt o înmulțire: $x : y = x \cdot \frac{1}{y}$, iar $\frac{a}{b} : \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x}$.
14. orice număr rațional $\frac{x}{y}$ se poate scrie sub formă de fracție zecimală cu un număr finit de zecimale, sau cu un număr infinit de zecimale dar care se repetă după o anumită regulă- fracții zecimale periodice.
15. Intrucerea întregilor în fracție: $a \frac{x}{y} = \frac{ay + x}{y}$.
16. Transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale: se face împărțirea numărătorului la numitor $\frac{a}{b} = x_0, x_1 x_2 \dots x_n$, (x_0 este partea întreagă a numărului și $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt zecimale)
17. transformarea fracțiilor zecimale simple în fracții ordinare:

$$x_0, x_1 x_2 \dots x_n = \frac{\overbrace{x_0 x_1 x_2 \dots x_n}^n}{100 \dots 0}, \text{ exemplu: } 2,154 = \frac{2154}{1000}$$

18. transformarea fracțiilor zecimale periodice în fracții ordinare:

$$x_0, (\overline{x_1 x_2 \dots x_n}) = \frac{x_0 x_1 x_2 \dots x_n - x_0}{99 \dots 9} \text{ , exemplu: } 2, (\overline{15}) = \frac{215 - 2}{99} = \frac{213}{99}$$

19. transformarea fracțiilor zecimale periodice mixte, în fracții ordinare:

$$x_0, x_1 x_2 \dots x_k (\overline{x_{k+1} x_{k+2} \dots x_{k+n}}) = \frac{x_0 x_1 x_2 \dots x_{k+n} - x_0}{99 \dots 900 \dots 0}$$

$$\text{Exemplu: } 2,74(\overline{15}) = \frac{27415 - 2}{9900} = \frac{27413}{9900}$$

20. Ridicarea la putere: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$, $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{Z}$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \quad a^n : a^m = a^{n-m}; \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}; \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n; \quad (a : b)^n = a^n : b^n; \quad \boxed{a^0 = 1}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \quad \frac{a}{b} \in \mathbb{R}; \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad a^{-1} = \frac{1}{a}; \quad a \in \mathbb{R}^*; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, n = nr. par \\ -1, n = nr. impar \end{cases}$$

21. $|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$, $x \in \mathbb{Z}$, $|x|$ se numește **modulul numărului x** sau **valoarea absolută** a lui x.

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad |x| = |-x|, \text{ oricare ar fi } x \text{ număr întreg,}$$

$$|x| \geq 0, \text{ oricare ar fi } x \text{ număr întreg, } |x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \text{ oricare ar fi } x, y \text{ numere întregi}$$

22. Priorități în calcul:

-în expresii se rezolvă mai întâi ridicările la putere, înmulțirile, împărțirile și apoi adunările și scăderile

-dacă sunt paranteze, se rezolvă mai întâi cele deschise, apoi cele închise și la urmă acoladele.

Exercițiu rezolvat:

$$+5 - (-16) : (+2) + (-9) : (-3) - (-17) \cdot (-1)$$

$$= 5 - (-8) + 3 - 17$$

$$1. = 5 + 8 + 3 - 17$$

$$= 16 - 17$$

$$= -1$$

Observații:

-am rezolvat mai întâi înmulțirile, împărțirile și apoi adunările și scăderile

-am ținut cont de regulile de calcul cu semne:

Pentru adunare:

- a) $(+)+(+)=(+); (-)+(-)=(-)$ pentru numere reale cu același semn
- b) $(+)+(-)$ sau $(-)+(+)$ adică la adunarea a două numere reale cu semne diferite se face scăderea din numărul cu valoare absolută mai mare a numărului cu valoare absolute mai mică și se dă semnul celui cu valoare absolută mai mare

Pentru înmulțire:

- a) $(+)\cdot(+)=(+); (-)\cdot(-)=(+)$ adică dacă înmulțim două numere cu același semn se obține un număr cu semnul $(+)$
- b) $(+)\cdot(-)=(-); (-)\cdot(+)=(-)$ adică dacă înmulțim două numere cu semne diferite se obține un număr cu semnul $(-)$

Exerciții propuse spre rezolvare:

2. a) $-3+(-3+5)-(-3+5):(-2)-9$; b) $3-3\cdot 2-15:3+(-15332)\cdot 0+0:15$

Exercițiu rezolvat:

$$\begin{aligned} & (-3)^3 + 10 \cdot [2 \cdot (+5 + 21 : (-7))] - (-1)^{27} + (-1)^{28} \\ & = -27 + 10 \cdot [2 \cdot (+5 - 3)] - (-1) + 1 \\ & = -27 + 10 \cdot (2 \cdot 2) + 1 + 1 \\ 3. & = -27 + 10 \cdot 4 + 2 \\ & = -27 + 40 + 2 \\ & = 13 + 2 \\ & = 15 \end{aligned}$$

Observații: am folosit pentru rezolvare

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, n = nr. par \\ -1, n = nr. impar \end{cases} \text{ și } (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \text{ adică } (-3)^3 = [(-1) \cdot 3]^3 = (-1)^3 \cdot 3^3 = -1 \cdot 27 = -27$$

Tragem concluzia că **dacă** $a \geq 0$ **atunci** $a^n \geq 0$,

iar dacă $a < 0$ **atunci** $a^n > 0$ **pentru** n **par**

și $a^n < 0$ **pentru** n **impar**

Exerciții propuse spre rezolvare:

4. **a)** $(-1)^3 + (-2)^2 + (-3)^1 + (-4)^0$; **b)** $(-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 4 \cdot (-2)^0$;
c) $9 + 2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 - 3^{50} : 3^{46}$; **d)** $(-6^2 + 3^5 : 3^4) \cdot (-8 + 7)^{143} - 2^{548} : 2^{546}$

Exercițiu rezolvat:

5. Fie mulțimea $A = \left\{ \sqrt{3}; -3 \cdot (2); 0; \sqrt{16}; -\sqrt{5}; 2.8; \frac{12}{6}; -\frac{\sqrt{4}}{2}; -6 \right\}$. Determinați mulțimile

$A \cap \mathbb{Z}; A \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Ordonăți crescător elementele mulțimii A .

Rezolvare:

$$\sqrt{16} = 4; \quad -\frac{\sqrt{4}}{2} = -\frac{2}{2} = -1; \quad \frac{12}{6} = 2$$

Mulțimea A se mai scrie și $A = \{ \sqrt{3}; -3 \cdot (2); 0; 4; -\sqrt{5}; 2.8; 2; -1; -6 \}$ și dacă **ordonăm crescător** elementele atunci $A = \{ -6; -3 \cdot (2); -\sqrt{5}; -1; 0; \sqrt{3}; 2; 2.8; 4 \}$.

Am folosit faptul că $\sqrt{3} \approx 1.73$ și $\sqrt{5} \approx 2.23$

$$A \cap \mathbb{Z} = \{ -6; -1; 0; 2; 4 \} \text{ și } A \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \{ -\sqrt{5}; \sqrt{3} \}$$

Exercițiu propus spre rezolvare:

6. Fie mulțimea $A = \left\{ -\sqrt{7}; 9 \cdot (2); 0; \sqrt{25}; \sqrt{5}; 5; 3; \frac{24}{5}; -\frac{\sqrt{9}}{3}; -4 \right\}$. Determinați mulțimile

$A \cap \mathbb{Z}; A \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Ordonăți descrescător elementele mulțimii A .

Exercițiu rezolvat:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{3} : 2 \frac{2}{3} \right)^3 : \left(-\frac{9}{8} \right)^3 + 1 = \left(1 + \frac{1}{3} : \frac{8}{3} \right)^3 : \left(-\frac{9}{8} \right)^3 + 1 \\ 7. & = \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} \right)^3 : \left(-\frac{9}{8} \right)^3 + 1 = \left(1 + \frac{1}{8} \right)^3 : \left(-\frac{9}{8} \right)^3 + 1 \\ & = \left(\frac{9}{8} \right)^3 : \left[-\left(\frac{9}{8} \right)^3 \right] + 1 = -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Exerciții propuse spre rezolvare:

8. **a)** $\left[-\frac{4}{5} + 2 : \left(1 + \frac{4}{5} \right) + 8 : 10 \right] \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \right)$; **b)** $-10 + \frac{1}{5} : \frac{1}{25} \cdot \left(-\frac{1}{10} \right)$;

$$\text{c)} \left[-\frac{4}{5} + 2 : \left(1 + \frac{4}{5} \right) + 8 : 10 \right] \cdot \left(1 + \frac{4}{5} \right);$$

$$\text{d)} \left(-14\frac{1}{6} + 0.0025 \cdot 25 \right) : \left(-4\frac{1}{4} : 0.85 + 1 : (-0.5) \right) : 0.2$$

Exercițiu rezolvat:

9. Transformați fracțiile zecimale în fracții ordinare, ireductibile:

a) 1.0001; b) 12.(6); c) 0.01(3).

Rezolvare:

$$\text{a)} 1.0001 = \frac{10001}{10000}; \quad \text{b)} 12.(6) = \frac{126 - 12}{9} = \frac{114}{9} \stackrel{(3)}{=} \frac{38}{3}$$

$$\text{c)} 0.01(3) = \frac{13 - 1}{900} = \frac{12}{900} \stackrel{(3)}{=} \frac{4}{300} \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{75}$$

Exercițiu propus spre rezolvare:

10. Transformați fracțiile zecimale în fracții ordinare, ireductibile:

a) 0.3; b) 1.564; c) 0.(3); d) 0.00025; e) 0.0(25); f) 1.(134).

23. INTERVALE DE NUMERE REALE

-sunt submulțimi ale mulțimii numerelor reale

Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$:

Intervale mărginite:

-intervalul închis $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$. Scrieți câteva exemple:.....

-intervalul deschis $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$. Scrieți câteva exemple:.....

Ce altfel de intervale mărginite ați mai întâlnit?

.....

Intervale nemărginite:

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$, $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$, $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$, $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Intervale simetrice:

Fie $a \in (0, +\infty)$. Intervalele simetrice sunt intervalele de forma: $(-a, a)$ sau $[-a, a]$

$(-a, a) = \{x \in \mathbb{R}, -a < x < a\} = \{x \in \mathbb{R}, |x| < a\}$, $[-a, a] = \{x \in \mathbb{R}, -a \leq x \leq a\} = \{x \in \mathbb{R}, |x| \leq a\}$

Operații cu intervale

Fie I și J două intervale de numere reale

-Reuniunea intervalelor: $I \cup J = \{x \mid x \in I \text{ sau } x \in J\}$

-Intersecția intervalelor: $I \cap J = \{x \mid x \in I \text{ și } x \in J\}$

-Diferența intervalelor: $I - J = \{x \mid x \in I \text{ și } x \notin J\}$

-Complementara unui interval: dacă $J \subset I$, complementara intervalului J în raport cu I este mulțimea $C_I(J) = I - J$

Exercițiu rezolvat:

11. Să se determine elementele mulțimii: $A = \{x \in \mathbb{Z}, |3x+2| \leq 5\}$

Rezolvare: $|3x+2| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 3x+2 \leq 5 \mid -2$
 $\Leftrightarrow -7 \leq 3x \leq 3 \mid :3 \Leftrightarrow -\frac{7}{3} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{7}{3}; 1\right]$ rezultă că $A = \left[-\frac{7}{3}; 1\right] \cap \mathbb{Z}$
 $A = \{-2; -1; 0; 1\}$

Exercițiu propus spre rezolvare:

12. Să se determine elementele mulțimii: $A = \{x \in \mathbb{N}, |2x-5| \leq 1\}$.

Exercițiu rezolvat:

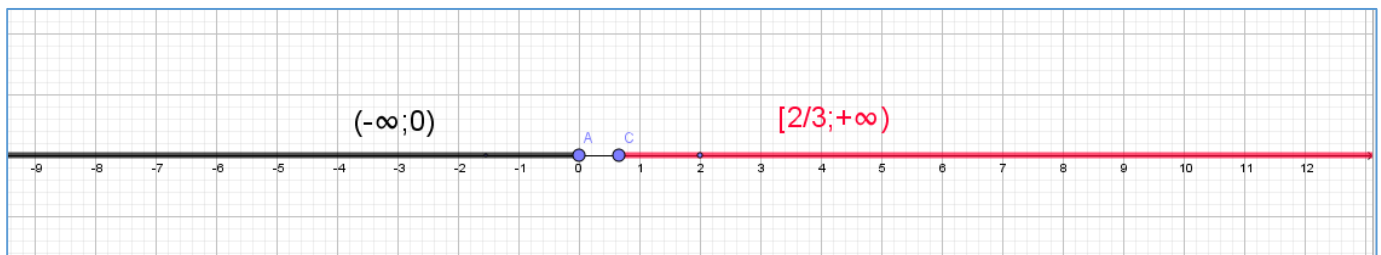
13. Să se determine: a) numerele reale negative pentru care $-3x+7 \leq 5$; b) numerele reale pozitive pentru care $x-5 > 2(x+1)$; c) numerele reale pentru care $-x+2 > 5$ sau $2x+3 \leq -1$; d) numerele reale pentru care $3x+2 \geq 0$ și $-x+3 > 2$.

Rezolvare:

a) $-3x+7 \leq 5 \Leftrightarrow -3x \leq 5-7 \Leftrightarrow -3x \leq -2 \mid :(-3) \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$

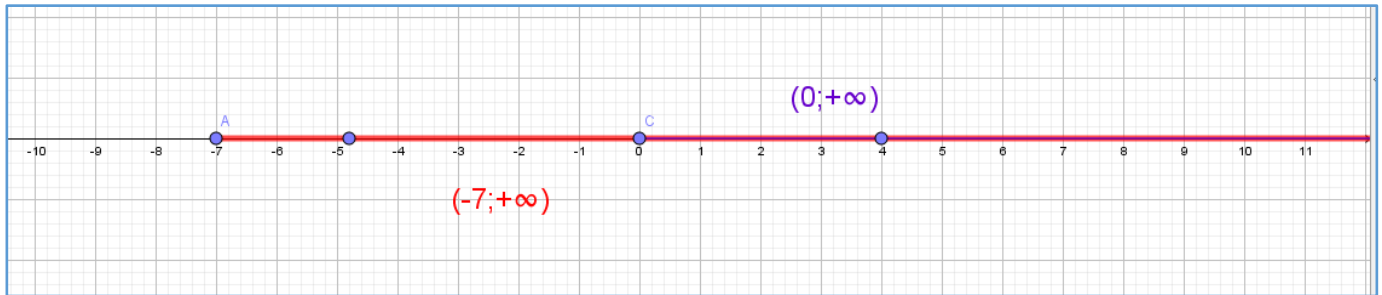
Mulțimea numerelor reale negative = $(-\infty; 0)$, iar cele pentru care $-3x+7 \leq 5$ sunt

$$(-\infty; 0) \cap \left[\frac{2}{3}; +\infty\right) = \emptyset$$



$$b) \quad x - 5 < 2(x+1) \Leftrightarrow x - 5 < 2x + 2 \Leftrightarrow x - 2x < 2 + 5 \Leftrightarrow -x < 7 \mid :(-1) \Leftrightarrow x > -7 \Leftrightarrow x \in (-7; +\infty)$$

Mulțimea numerelor reale pozitive = $(0; +\infty)$, iar cele pentru care $x - 5 > 2(x+1)$ sunt $(0; +\infty) \cap (-7; +\infty) = (0; +\infty)$



$$c) \quad -x + 2 > 5 \Leftrightarrow -x > 3 \mid :(-1) \Leftrightarrow x < -3 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3)$$

$$2x + 3 \leq -1 \Leftrightarrow 2x \leq -1 - 3 \Leftrightarrow 2x \leq -4 \mid :2 \Leftrightarrow x \leq -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2]$$

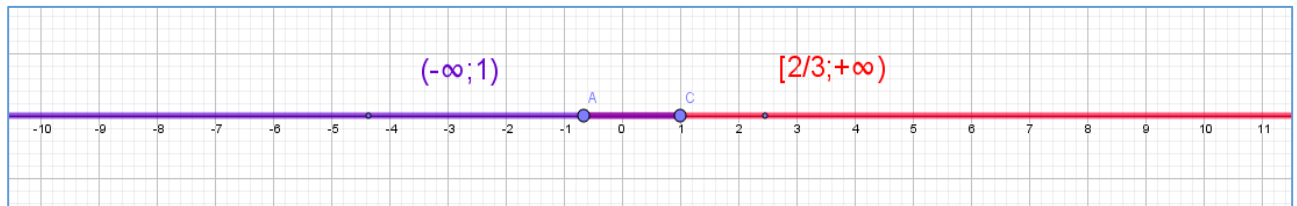
Mulțimea numerelor reale pentru care $-x + 2 > 5$ sau $2x + 3 \leq -1$ este $(-\infty; -3) \cup (-\infty; -2] = (-\infty; -2]$

$$d) \quad 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -2 \mid :3 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

$$-x + 3 > 2 \Leftrightarrow -x > 2 - 3 \Leftrightarrow -x > -1 \mid :(-1) \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1)$$

Mulțimea numerelor reale pentru care $3x + 2 \geq 0$ și $-x + 3 > 2$ este

$$\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right) \cap (-\infty; 1) = \left[-\frac{2}{3}; 1\right)$$



Exercițiu propus spre rezolvare:

14. Să se determine: a) numerele reale negative pentru care $4x + 1 \geq -3$; b) numerele reale pozitive pentru care $2x + 3 < x + 2$; c) numerele reale pentru care $2x - 1 > 5$ sau $-x + 3 < -1$; d) numerele reale pentru care $-x + 2 \geq 0$ și $2x - 1 > -5$.