

Operații cu Propoziții

Definiții:

1. Negația propozițiilor

Def. Negația propoziției p este propoziția “non p ” notată $\neg p$ sau $\bar{p}$, care este adevărată când p este falsă și falsă când p este adevărată.

Tabelul de adevăr este:

$v(p)$	$v(\bar{p})$
1	0
0	1

Reguli de negare a propoziției universale și existențiale:

$$\neg(\forall x, p(x)) \leftrightarrow \exists x, \neg p(x)$$

$$\neg(\exists x, p(x)) \leftrightarrow \forall x, \neg p(x)$$

2. Disjuncția propozițiilor

Def. Disjuncția propozițiilor p, q este propoziția “ p sau q ” notată $p \vee q$, care este adevărată când cel puțin una din propoziții este adevărată.

Tabelul de adevăr este:

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \vee q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

3. Conjuncția propozițiilor

Def. Conjuncția propozițiilor p, q este propoziția “ p și q ” notată $p \wedge q$, care este adevărată când ambele propoziții sunt adevărate.

Tabelul de adevăr este:

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \wedge q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

4. Implicația propozițiilor

Def. Implicația propozițiilor p, q este propoziția “ p implică q ” notată $p \rightarrow q$, care este propoziție falsă când p este adevărată și q este falsă și propoziție adevărată în rest.

Tabelul de adevăr este:

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \rightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

5. Echivalența propozițiilor

Def. Echivalența propozițiilor p, q este propoziția " p echivalent cu q " notată $p \leftrightarrow q$, care este propoziție adevărată când ambele propoziții au aceeași valoare de adevăr.

Tabelul de adevăr este:

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \leftrightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

6. Simbolurile $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ se numesc **CONECTORI LOGICI**

7. Expresiile formate din litere legate între ele prin conectori logici se numesc **formule de calcul propozițional**.

8. O formulă $\alpha (p, q, r, \dots)$ care are valoarea de adevăr : propoziție adevărată, indiferent de valorile de adevăr ale propozițiilor $p, q, r, \dots$, se numește **TAUTOLOGIE**.

Exercițiu rezolvat:

1) Se dau propozițiile: $p: \sqrt{7 + \sqrt{1 + \sqrt{7 + \sqrt{3}}}} = 3$ și q : Toate numerele prime sunt impare.

Să se determine valoarea de adevăr pentru propozițiile: $p, q, \bar{p}, p \vee q, p \wedge q, p \rightarrow q, p \leftrightarrow q, \bar{p} \rightarrow q, (p \wedge q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

Rezolvare:

$$\sqrt{7 + \sqrt{1 + \sqrt{7 + \sqrt{3}}}} = 3 \mid \uparrow^2 \Leftrightarrow 7 + \sqrt{1 + \sqrt{7 + \sqrt{3}}} = 9 \mid \uparrow^2 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{7 + \sqrt{3}} = 81 \mid -1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7 + \sqrt{3}} = 80 \mid \uparrow^2 \Leftrightarrow 7 + \sqrt{3} = 6400 \mid -7 \Leftrightarrow \sqrt{3} = 5393 \text{ (F) deci } v(p)=0$$

q : Toate numerele prime sunt impare (F) 2 este număr prim și este par, deci $v(q)=0$

Facem tabelul de adevăr:

$v(p)$	$v(q)$	$v(\bar{p})$	$v(p \vee q)$	$v(p \wedge q)$	$v(p \rightarrow q)$	$v(p \leftrightarrow q)$	$v(\bar{p} \rightarrow q)$	$v((p \wedge q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))$
0	0	1	0	0	1	1	0	0

Exercițiu în clasă:

2) Se dau propozițiile: $p: \sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{5}(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ și q : În orice triunghi echilateral, măsura fiecărui unghi este de 60°

Să se determine valoarea de adevăr pentru propozițiile: $p, q, \bar{q}, p \vee q, p \wedge q, p \rightarrow q, \leftrightarrow q, \bar{q} \rightarrow p, (p \vee q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

Exercițiu rezolvat:

3) Se consideră propozițiile:

p_1 : "există $x \in N$, astfel încât $2x + 5 \leq x + 4$ "

p_2 : "oricare ar fi $x \in R, x^2 - 5x \neq -4$ "

p_3 : "există $x \in Z$, astfel încât $|x + 5| < 8$ "

- a) Să se scrie propozițiile cu ajutorul cuantificatorilor ;
 b) Să se nege propozițiile de mai sus;
 c) Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:
 $p_1; p_2; p_3; \overline{p_1}; \overline{p_2}; \overline{p_3}; \overline{p_1 \wedge p_2}; \overline{(p_1 \vee p_3)}$.

Rezolvare:

- a) $p_1: " \exists x \in N, 2x + 5 \leq x + 4 "$; $p_2: " \forall x \in R, x^2 - 5x \neq -4 "$;
 $p_3: " \exists x \in Z, |x + 5| < 8 "$
 b) $\neg p_1: " \forall x \in N, 2x + 5 \geq x + 4 "$
 $\neg p_2: " \exists x \in R, x^2 - 5x = -4 "$
 c) Pentru a afla valorile de adevăr, rezolvăm mai întâi inecuația și apoi ecuația

$2x + 5 \leq x + 4$ separăm termenii și obținem $2x - x \leq 4 - 5$ adică $x \leq -1$

Prin urmare propoziția $p_1: " \exists x \in N, 2x + 5 \leq x + 4 "$ este **falsă**, adică $v(p_1) = 0$ pentru că nu există niciun număr natural mai mic sau egal cu 1.

$x^2 - 5x = -4$ ducem pe -4 cu semn schimbat în membrul stâng și obținem ecuația de gradul II

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad a = 1, b = -5, c = 4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \Leftrightarrow \Delta = 25 - 16 = 9$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x_1 = \frac{5+3}{2} = 4 \in R$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x_1 = \frac{5-3}{2} = 1 \in R$$

Observăm că $x^2 - 5x \neq -4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \neq 0$ prin urmare propoziția

$p_2: " \text{oricare ar fi } x \in R, x^2 - 5x \neq -4 "$

este **falsă** deoarece există valorile numerele reale 1 și 4 pentru care $x^2 - 5x + 4 = 0$, adică $v(p_2) = 0$

$$|x + 5| < 8 \Leftrightarrow -8 < x + 5 < 8 | -5 \Leftrightarrow -13 < x < 3 \Rightarrow x \in (-13; 3) \cap Z$$

$$\Rightarrow x \in \{-12; -11; \dots; 0; 1; 2\}. \text{ Observăm astfel că propoziția } p_3: " \exists x \in Z, |x + 5| < 8 "$$

este **adevărată** deci $v(p_3) = 1$

Deducem că

p_1	p_2	p_3	$\overline{p_1}$	$\overline{p_2}$	$\overline{p_3}$	$p_1 \wedge p_2$	$\overline{p_1 \wedge p_2}$	$p_1 \vee p_3$	$\overline{p_1 \vee p_3}$
0	0	1	1	1	0	0	1	1	0

Exercițiu în clasă:

- 4) Se consideră propozițiile:
 $p_1: " \text{există } x \in Z, \text{ astfel încât } x^2 = 1 "$
 $p_2: " \text{oricare ar fi } x \in R, 2x^2 - 3x \neq 0 "$
 $p_3: " \text{există } x \in Z, \text{ astfel încât } |x - 2| \leq 5 "$
 d) Să se scrie propozițiile cu ajutorul cuantificatorilor ;
 e) Să se nege propozițiile de mai sus;
 f) Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:
 $p_1; p_2; p_3; \neg p_1; \neg p_2; \neg p_3; \neg(p_1 \wedge p_3); \neg(p_2 \vee p_3)$.