

Elemente de logică matematică

Propoziții

Definiții:

- Enunțul** este un ansamblu de simboluri cărora li s-a dat un anumit sens
- Propoziția** este un enunț care este adevărat sau fals (nu și una și alta în același timp). Propozițiile se notează cu: $p, q, r, \dots$
- Valoarea de adevăr** este proprietatea unei propoziții p de a fi adevărată sau falsă, se notează cu

$$v(p) \text{ și aceasta este } v(p) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } p \text{ este adevărată} \\ 0, \text{ dacă } p \text{ este falsă} \end{cases} = \begin{cases} A, \text{ dacă } p \text{ este adevărată} \\ F, \text{ dacă } p \text{ este falsă} \end{cases}$$

Exercițiu rezolvat:

1) Să se precizeze care din următoarele enunțuri sunt propoziții

- Rezultatul calculului $\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - \frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ este -1
- Rezultatul calculului $-3 + (-3+5) - (-3+5):(-2) - 9$ este 3
- Trapezul este patrulaterul cu laturile paralele două câte două
- Scrive, domnule elev!
- $2x-1=5, x \in \mathbb{Z}$

Rezolvare:

- Este propoziție adevărată deoarece

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - \frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{1} - \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} - 1 = -1$$
- Este o propoziție falsă deoarece rezultatul calculului este

$$-3 + \underbrace{(-3+5)}_2 - (-3+5):(-2) - 9$$
 și nu 3 .

$$= -3 + 2 + 1 - 9 = -9$$
- Este o propoziție falsă, patrulaterul cu laturile paralele două câte două este un paralelogram și un trapez
- Enunțul un îndemn, un este o propoziție în sensul logicii matematice, un i se poate atribui o valoare de adevăr
- Enunțul depinde de o variabilă, astfel dacă înlocuim pe x cu 3 , obținem propoziție adevărată iar dacă înlocuim cu orice alt număr întreg diferit de 3 se obține o propoziție falsă, prin urmare enunțul nu este o propoziție.

Exercițiu propus spre rezolvare:

2) Să se precizeze care din următoarele enunțuri sunt propoziții

- a) Ce frumos este cerul!
- b) Rezultatul calculului $-2 - 2^2 + (-2)^2 : (-1)^{2008}$ este -2
- c) Rombul are diagonalele perpendiculare
- d) $-x + 2 \geq 0, x \in \mathbb{R}$

Predicate

4. Predicat pe mulțimea E este un enunț care depinde de una sau mai multe variabile și care pentru orice valori din E date variabilelor, corespunde o propoziție adevărată sau falsă. Mulțimea E se numește **domeniu de definiție** al predicatului. Mulțimea elementelor un $a \in E$ pentru care propoziția $p(a)$ este adevărată, se numește **mulțime de adevăr** a predicatului $p(x)$

Notatii pentru predikat:

$p(x)$ - predikat unar;
 $p(x, y)$ - predikat binar;
 $p(x, y, z)$ - predikat ternar;

5. Propoziția universală

Fie $p(x), x \in E$, un predikat unar. Propoziția "oricare ar fi $x \in E$ are loc $p(x)$ " se numește **propoziție universală** asociată predicatului $p(x)$. Se notează $(\forall x)p(x)$ sau $\forall x \in E, p(x)$.

Cuntificatorul "oricare ar fi" sau "pentru oricare" notat cu simbolul " $\forall$ ", se numește **cuntificatorul universal**.

Propoziția $(\forall x)p(x)$ este adevărată dacă pentru orice $a \in E$, propoziția $p(a)$ este adevărată.

6. Propoziția existențială

Fie $p(x), x \in E$, un predikat unar. Propoziția "există $x \in E$ astfel încât are loc $p(x)$ " se numește **propoziție existențială** asociată predicatului $p(x)$. Se notează $\exists p(x)$ sau $\exists x \in E, p(x)$.

Cuntificatorul "există" notat cu simbolul " $\exists$ ", se numește **cuntificatorul existențial**.

Propoziția $\exists p(x)$ este adevărată dacă există cel puțin un $a \in E$ astfel încât propoziția $p(a)$ să fie adevărată.

Exercițiu rezolvat:

3) Să se determine mulțimea de adevăr a predicatelor:

- a) $p(x) : "-3x + 2(x - 4) = 7 - 5x, x \in \mathbb{Z}"$; b) $q(x) : "-2x^2 + 3x - 3 = -5, x \in \mathbb{Q}"$

Rezolvare:

- a) Se rezolvă ecuația $-3x + 2(x - 4) = 7 - 5x$ și verificăm dacă sunt soluții în $\mathbb{Z}$

$$-3x + 2(x - 4) = 7 - 5x$$

$$-3x + 2x - 8 + 5x = 7$$

$$4x = 7 + 8$$

$$4x = 15 \mid :4$$

deci mulțimea de adevăr pentru $p(x)$ este $\emptyset$.

$$x = \frac{15}{4} \notin \mathbb{Z}$$

b) Se rezolvă ecuația $-2x^2 + 3x - 3 = -5$ și verificăm dacă sunt soluții în $\mathbb{Q}$

c)

$$-2x^2 + 3x - 3 = -5 \Leftrightarrow -2x^2 + 3x - 3 + 5 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$a = -2, b = 3, c = 2 \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 \Leftrightarrow \Delta = 9 + 16 = 25 > 0 \quad \text{deci ecuația are două soluții diferite}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \cdot (-2)} \Rightarrow x_1 = \frac{-3 - 5}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2 \in \mathbb{Q} \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \cdot (-2)} \Rightarrow x_2 = \frac{-3 + 5}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \end{aligned} \right|$$

Rezultă că mulțimea de adevăr pentru $q(x)$ este $\left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$.

Exercițiu propus spre rezolvare:

4) Să se determine mulțimea de adevăr a predicatelor:

a) $p(x) : "5x - 3(-x + 1) = 2 + 11x, x \in \mathbb{Q}";$

b) $q(x) : "2x^2 - 5x - 2 = 5, x \in \mathbb{Z}"$

Exercițiu rezolvat:

5) Se consideră propozițiile:

p : "există $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $-2x + 3 \geq x$ "

q : "pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ "

r : "există $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $4x^2 - 3x - 1 = 0$ "

a) Să se scrie propozițiile cu ajutorul cuantificatorilor ;

b) Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor.

Rezolvare:

a) p : " $\exists x \in \mathbb{N}$, $-2x + 3 \geq x$ "

q : " $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ "

$$r : " \exists x \in \mathbb{Z} , 4x^2 - 3x - 1 = 0 "$$

b) $-2x + 3 \geq x \Leftrightarrow -3x \geq -3 | : (-3) \Leftrightarrow x \leq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1]$ dar $x \in \mathbb{N}$ rezultă că $x \in (-\infty, 1] \cap \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{0, 1\}$, deci există cel puțin un element $a \in \mathbb{N}$ astfel

încât $p(a)$ să fie adevărată adică $p : " \exists x \in \mathbb{N} , -2x + 3 \geq x "$ este adevărată

$$x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1) - 2(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \neq 0$$

Observăm că dacă înlocuim pe x cu 1 sau cu 2 obținem $0 \neq 0$ propoziție falsă, deci propoziția

$q : " \forall x \in \mathbb{R} , x^2 - 3x + 2 \neq 0 "$ este falsă

$$4x^2 - 3x - 1 = 0, \quad a = 4, b = -3, c = -1 \quad \begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ \Delta &= (-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) \Leftrightarrow \Delta = 9 + 16 = 25 > 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \cdot 4} \Rightarrow x_1 = \frac{3 - 5}{8} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \cdot 4} \Rightarrow x_2 = \frac{3 + 5}{8} = \frac{8}{8} = 1 \in \mathbb{Z}$$

Am descoperit că există numărul întreg 1 soluție a ecuației, adică propoziția

$r : " \exists x \in \mathbb{Z} , 4x^2 - 3x - 1 = 0 "$ este adevărată.

Exercițiu propus spre rezolvare:

6) Se consideră propozițiile:

$p : " \text{pentru orice } x \in \mathbb{Z}, x - 5 < -2(x + 1) "$

$q : " \text{există } x \in \mathbb{Q}, \text{ astfel încât } x^2 + 5x + 4 = 0 "$

$r : " \text{există } x \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } -15x^2 + 8x - 1 = 0 "$

c) Să se scrie propozițiile cu ajutorul cuantificatorilor ;

d) Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor.