

Radicalul de ordinal 2 dintr-un număr real pozitiv

BREVIAR TEORETIC

Def. Se numește radical de ordinal 2 dintr-un număr real pozitiv a , **numărul real pozitiv** notat cu $\sqrt{a}$ cu proprietatea că $(\sqrt{a})^2 = a$

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

Observație: $\sqrt{0} = 0$ și $\sqrt{a^2} = |a|$, $\forall a \in \mathbb{R}$

Exemple: $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$, $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

Proprietăți:

1. Radicalul produsului

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, a, b \in [0; +\infty)$$

$$\sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \dots \cdot \sqrt{a_n}, a_1, a_2, \dots, a_n \in [0; +\infty)$$

$$\sqrt{16 \cdot 25} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{25} = 4 \cdot 5 = 20$$

$$\sqrt{81 \cdot 3} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

2. Puterea unui radical

$$(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}, a \in [0; +\infty), n \in \mathbb{N}$$

3. Radicalul unui raport

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, a \in [0; +\infty), b \in (0; +\infty)$$

$$\sqrt{\frac{144}{36}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{36}} = \frac{12}{6} = 2$$

4. Scoaterea unui factor de sub radical

$$\sqrt{a^{2k} \cdot b} = a^k \cdot \sqrt{b}, a, b \in [0; +\infty)$$

$$\begin{array}{l|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad \begin{array}{l|l} 272 & 2 \\ 136 & 2 \\ 68 & 2 \\ 34 & 2 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \quad \sqrt{272} = 4\sqrt{17}$$

5. Compararea radicalilor

$$\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow a \leq b, \quad a, b \in [0; +\infty)$$

Exercițiu rezolvat:

1. Să se calculeze: $\sqrt{3^4}, \sqrt{0.04}, \sqrt{(-2)^6}, \sqrt{\frac{16}{25}}, \sqrt{243}, \sqrt{49 \cdot 25 \cdot 100}$

Rezolvare:

$$\sqrt{3^4} = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 3 \cdot 3 = 9$$

$$\sqrt{(-2)^6} = \sqrt{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 4} = 4\sqrt{4} = 8$$

sau mai bine este să efectuați ridicarea la putere și să extrageți apoi radicalul

$$\sqrt{(-2)^6} = \sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt{0.04} = \sqrt{\frac{4}{100}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$\sqrt{243}$ pentru acest număr trebuie să descompunem în produs de factori primi și din grupă de

2 factori iese unul de sub radical

$$\begin{array}{r|l} 243 & \\ 81 & \left. \begin{array}{l} 3 \\ 3 \end{array} \right\} 3 \\ 27 & \left. \begin{array}{l} 3 \\ 3 \end{array} \right\} 3 \\ 9 & \left. \begin{array}{l} 3 \\ 3 \end{array} \right\} 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Deci $\sqrt{243} = 9\sqrt{3}$

$$\sqrt{49 \cdot 25 \cdot 100} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{100} = 7 \cdot 5 \cdot 10 = 350$$

Exercițiu propus spre rezolvare

2. Să se calculeze: $\sqrt{7^4}, \sqrt{0.0004}, \sqrt{(-3)^2}, \sqrt{\frac{49}{81}}, \sqrt{128}, \sqrt{64 \cdot 36 \cdot 25}$

Radicalul de ordinal 3 dintr-un număr real**BREVIAR TEORETIC**

Def. Se numește radical de ordinal 3 dintr-un număr real a , numărul real notat cu $\sqrt[3]{a}$ cu proprietatea că $(\sqrt[3]{a})^3 = a$

Observație: $\sqrt[3]{0} = 0$ și $\sqrt[3]{a^3} = a$

Exemple: $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

1. Radicalul produsului

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}, a, b \in R$$

$$\sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \sqrt[3]{a_1} \cdot \sqrt[3]{a_2} \cdot \dots \cdot \sqrt[3]{a_n}, a_1, a_2, \dots, a_n \in R$$

2. Puterea unui radical

$$(\sqrt[3]{a})^n = \sqrt[3]{a^n}, a \in R, n \in N$$

3. Radicalul unui raport

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}, a, b \in R, b \neq 0$$

4. Scoaterea unui factor de sub radical

$$\sqrt[3]{a^{3k} \cdot b} = a^k \cdot \sqrt[3]{b}, a, b \in R$$

5. Compararea radicalilor

$$\sqrt[3]{a} \leq \sqrt[3]{b} \Leftrightarrow a \leq b, a, b \in R$$

Exercițiu rezolvat:

3. Să se calculeze: $\sqrt[3]{27}, \sqrt[3]{-64}, \sqrt[3]{\frac{-1}{8}}, \sqrt[3]{2^6 \cdot (-1)^3 \cdot 1000}, \sqrt[3]{243}$

Rezolvare:

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

$$\sqrt[3]{\frac{-1}{8}} = \frac{\sqrt[3]{-1}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{-1}{2}$$

$$\sqrt[3]{2^6 \cdot (-1)^3 \cdot 1000} = \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{(-1)^3} \cdot \sqrt[3]{1000} = 4 \cdot (-1) \cdot 10 = -40$$

$$\sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2)} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$$

$\sqrt[3]{243}$ trebuie să descompunem numărul în produs de factori primi și din grupă de 3 factori iese unul de sub radical

$$\begin{array}{r|l}
 243 & 3 \\
 81 & 3 \\
 27 & 3 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} 3$$

deci $\sqrt[3]{243} = 3\sqrt[3]{9}$

Exercițiu propus spre rezolvare:

4. Să se calculeze: $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{-125}$, $\sqrt[3]{\frac{-27}{64}}$, $\sqrt[3]{3^6 \cdot (-2)^3 \cdot (-1000)}$, $\sqrt[3]{256}$

Raționalizarea numitorilor

-a raționaliza numitorul unei fracții înseamnă a amplifica fracția astfel încât să dispară radicalul de la numitor

1. Când este la numitor radical de ordinal 2 se amplifică cu acel radical

$$\sqrt{a}) \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad \text{pentru că } (\sqrt{a})^2 = a$$

Exemplu: $\sqrt{5}) \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

2. Când este la numitor radical de ordinal 3, adică $\sqrt[3]{a}$ se amplifică cu $\sqrt[3]{a^2}$, iar dacă este $\sqrt[3]{a^2}$ se amplifică cu $\sqrt[3]{a}$ pentru a obține la numitor $\sqrt[3]{a^3} = a$

Exemplu:

$$\sqrt[3]{3^2}) \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3} \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{2}) \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

3. Când la numitor este o expresie de forma $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ se amplifică cu expresia conjugată, folosind formula $\underbrace{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}_{\text{expresii conjugate}} = a - b$

Exemplu:
$$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{1-3} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{-2} = -(1+\sqrt{3})$$

Operații cu radicali

Proprietățile 1, 2, 3, 4 ale radicalilor, scrise de la dreapta la stânga devin operații cu radicali

1. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $a, b \in [0; +\infty)$

$\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \dots \cdot \sqrt{a_n} = \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0; +\infty)$

$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$, $a, b \in R$

$\sqrt[3]{a_1} \cdot \sqrt[3]{a_2} \cdot \dots \cdot \sqrt[3]{a_n} = \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$

2. $\sqrt[n]{a} = (\sqrt{a})^n$, $a \in [0; +\infty)$, $n \in N$

$\sqrt[n]{a} = (\sqrt[n]{a})^n$, $a \in R$, $n \in N$

3. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $a \in [0; +\infty)$, $b \in (0; +\infty)$

$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, $a, b \in R$, $b \neq 0$

4. Introducerea factorilor sub radical

$a^k \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^{2k} \cdot b}$, $a, b \in [0; +\infty)$

$a^k \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^{3k} \cdot b}$, $a, b \in R$

Exercițiu rezolvat:

5. Să se efectueze: a) $(6 - \sqrt{6})(3\sqrt{2} + 4\sqrt{3})$; b) $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{18}$

Rezolvare:

a)
$$\begin{aligned} (6 - \sqrt{6})(3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}) &= 6 \cdot 3\sqrt{2} + 6 \cdot 4\sqrt{3} - \sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2} - \sqrt{6} \cdot 4\sqrt{3} \\ &= 18\sqrt{2} + 24\sqrt{3} - 3\sqrt{12} - 4\sqrt{18} \\ &= 18\sqrt{2} + 24\sqrt{3} - 3 \cdot 2\sqrt{3} - 4 \cdot 3\sqrt{2} \\ &= 18\sqrt{2} + 24\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - 12\sqrt{2} = 6\sqrt{2} + 18\sqrt{3} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{18} &= \sqrt[3]{81 \cdot 3 \cdot 18} = \sqrt[3]{3^4 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 2} = \sqrt[3]{3^6 \cdot 6} = \sqrt[3]{(3^2)^3 \cdot 6} = \\ &= 3^2 \cdot \sqrt[3]{6} = 9\sqrt[3]{6} \end{aligned}$$

Exercițiu propus spre rezolvare:

6. Să se efectueze:

a) $6\sqrt{5} - 10\sqrt{5} + 3(2\sqrt{5} - 7\sqrt{5})$;

b) $3\sqrt{50} + 5\sqrt{8} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{128}$;

c) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{686} - \sqrt[3]{16}$;

d) $5\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{375} + \sqrt[3]{\frac{3}{8}} + \sqrt[3]{\frac{81}{8}}$.

Exercițiu rezolvat:

7. Să se raționalizeze numitorii fracțiilor:

a) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$; b) $\frac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$; c) $\frac{12}{\sqrt[3]{2}}$; $\frac{15}{\sqrt[3]{25}}$.

Rezolvare:

a) $\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$;

b) $\frac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{\sqrt{8}+\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{8}-\sqrt{5})}{(\sqrt{8})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{3(\sqrt{8}-\sqrt{5})}{8-5} =$
 $\frac{3(\sqrt{8}-\sqrt{5})}{3} = \sqrt{8} - \sqrt{5}$

c) $\frac{12}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{12}{\sqrt[3]{2}} = \frac{12\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{12\sqrt[3]{4}}{2} = 6\sqrt[3]{4}$

$\frac{15}{\sqrt[3]{25}} = \frac{15}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2}} \cdot \frac{15}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{15\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{15\sqrt[3]{5}}{5} = 3\sqrt[3]{5}$

Exercițiu rezolvat:

8. Să se raționalizeze numitorii fracțiilor:

a) $\frac{14}{3\sqrt{7}}$; b) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; c) $\frac{18}{\sqrt[3]{2}}$; $\frac{12}{\sqrt[3]{9}}$.