

**Breviar teoretic**

**1. Știm că ecuația de gradul II** are forma  $ax^2 + bx + c = 0$  unde  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$  și are **soluțiile**  $x_1, x_2$ .

$x_1, x_2$  se numesc și **rădăcinile funcției de gradul II**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$

Relațiile între rădăcinile funcției, respectiv soluțiile ecuației și coeficienții  $a, b, c$  sunt

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \text{ care se mai numesc și } \mathbf{\text{relațiile lui Viète}}$$

**2.** Formarea ecuației de gradul II, când se cunosc soluțiile :

-se calculează  $S$  și  $P$  și apoi se scrie ecuația  $x^2 - Sx + P = 0$

**3.** Descompunerea expresiei  $ax^2 + bx + c$  în produs de factori primi:

-se atașează ecuația  $ax^2 + bx + c = 0$ , se rezolvă și se obțin cele două soluții reale ale ecuației  $x_1, x_2$

-descompunerea expresiei  $ax^2 + bx + c$  în produs de factori primi este:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$  (obs. această descompunere în mulțimea numerelor reale se poate face doar când soluțiile sunt reale).

**Exercițiu rezolvat**

**1.** Să se scrie relațiile lui Viète pentru ecuațiile:

a)  $x^2 - 5x + 7 = 0$ , b)  $-7x^2 - x + 1 = 0$ , c)  $-x^2 + (m-1)x + m + 3 = 0, m \in \mathbb{R}$

Rezolvare:

a)  $x^2 - 5x + 7 = 0$ ,  $a = 1, b = -5, c = 7$

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{-5}{1} = 5 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{7}{1} = 7 \end{cases}$$

b)  $-7x^2 - x + 1 = 0$ ,  $a = -7, b = -1, c = 1$

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{-1}{-7} = -\frac{1}{7} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{-7} = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

c)  $-x^2 + (m-1)x + m + 3 = 0, m \in \mathbb{R}, a = -1, b = m-1, c = m+3$

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{m-1}{-1} = m-1 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{m+3}{-1} = -m-3 \end{cases}$$

### Exercițiu propus pentru rezolvare:

2. Să se scrie relațiile lui Viète pentru ecuațiile:

a)  $x^2 + 2x + 3 = 0$ , b)  $-2x^2 + 3x + 5 = 0$ , c)  $2x^2 + mx + m - 2 = 0, m \in \mathbb{R}$

### Exercițiu rezolvat

3. Să se determine valoarea expresiei  $E = x_1 + x_2 - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$  știind că  $x_1, x_2$  sunt soluțiile ecuației  $3x^2 - 2x - 1 = 0$ .

### Rezolvare:

Observăm că  $E = x_1 + x_2 - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = (x_1 + x_2) - \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) = (x_1 + x_2) - \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$

Prin urmare trebuie să scriem relațiile lui Viète

$3x^2 - 2x - 1 = 0, a = 3, b = -2, c = -1$

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{și înlocuim în E}$$

$$E = (x_1 + x_2) - \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{2}{3} - \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{1} = \frac{8}{3}$$

### Exercițiu propus pentru rezolvare:

4. Să se determine valoarea expresiei  $E = 3(x_1 + x_2) - 2x_1 x_2$  știind că  $x_1, x_2$  sunt soluțiile ecuației  $-5x^2 - 7x + 3 = 0$ .

**Exercițiu rezolvat**

5. Să se formeze ecuația de gradul II în  $x$  știind că admite soluțiile  $x_1 = 2 - \sqrt{7}$  și  $x_2 = 2 + \sqrt{7}$

-se calculează  $S$  și  $P$  și apoi se scrie ecuația  $x^2 - Sx + P = 0$

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 \\ P = x_1 \cdot x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 - \sqrt{7} + 2 + \sqrt{7} = 4 \\ P = (2 - \sqrt{7})(2 + \sqrt{7}) = 2^2 - (\sqrt{7})^2 = 4 - 7 = -3 \end{cases}$$

Am folosit formula  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ .

Ecuația cerută este  $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 = 0$

**Exerciții propuse pentru rezolvare:**

6. Să se formeze ecuația de gradul II în  $x$  știind că admite soluțiile  $x_1 = \sqrt{2}$  și  $x_2 = -\sqrt{2}$
7. Să se formeze ecuația de gradul II în  $x$  știind că admite soluțiile  $x_1 = -2$  și  $x_2 = 5$

**Exercițiu rezolvat**

8. Să se descompună în produs de factori primi expresia  $2x^2 - 5x + 2$

**Rezolvare:**

Se atașează ecuația de gradul II:  $2x^2 - 5x + 2 = 0$ ,  $a = 2, b = -5, c = 2$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 + 3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

descompunerea expresiei  $ax^2 + bx + c$  în produs de factori primi este:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{deci } 2x^2 - 5x + 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2)$$

**Exercițiu propus pentru rezolvare:**

9. Să se descompună în produs de factori primi expresiile  $x^2 + 7x + 12$ ;  $-x^2 + 3x - 2$ ;

$$2x^2 - 5x - 3; -3x^2 + 5x + 2; x^2 + x - 12$$