

Definiții

1. Fie d o dreaptă în planul P . Dreapta $d' \subset P$ are **aceeași direcție** cu dreapta d dacă $d = d'$

sau $d \parallel d'$

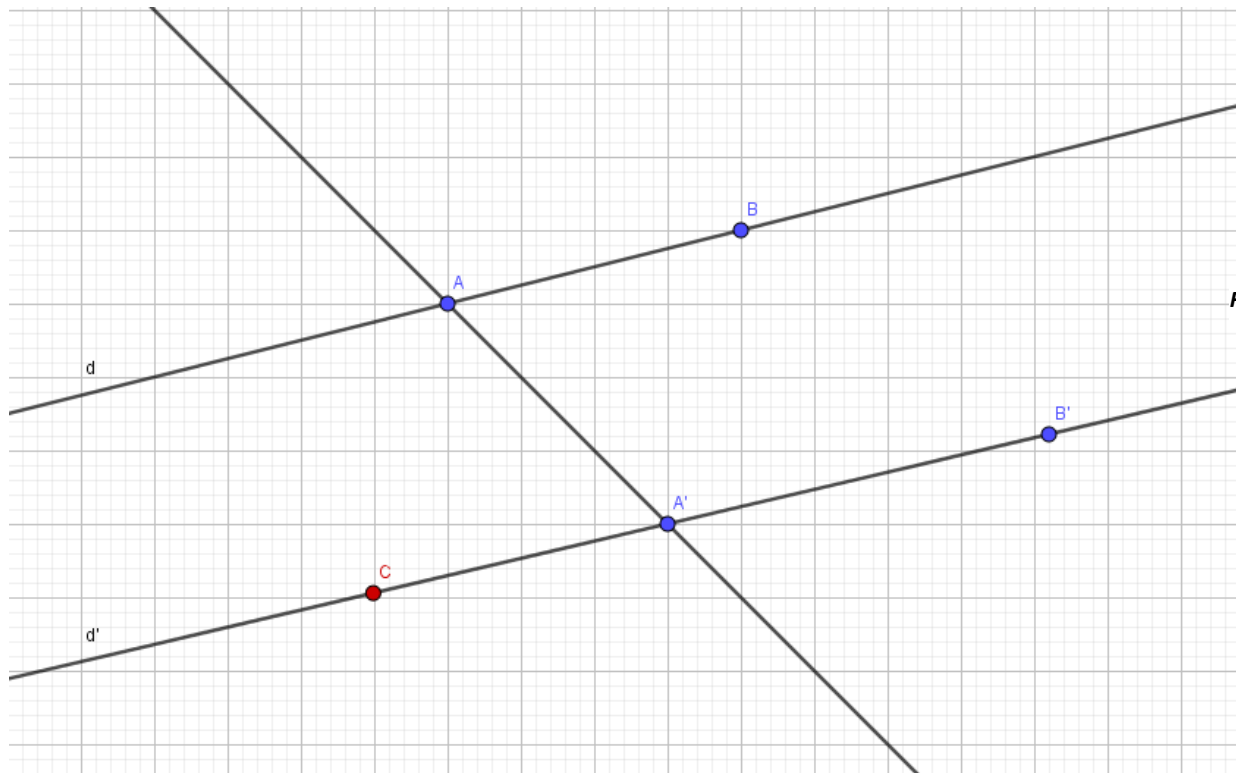


Fig. 1

2. Mulțimea dreptelor din plan care au **aceeași direcție** cu dreapta d formează **DIRECȚIA DREPTEI d** .
3. Fie $d \parallel d'$ două drepte paralele în planul P . Semidreptele $(AB$ și $(A'B'$ **au același sens** dacă se află de aceeași parte a dreptei AA' (adică în același semiplan determinat de dreapta AA'), iar semidreptele $(AB$ și $(A'C$ **au sensuri opuse** dacă se află de o parte și de alta a dreptei AA' (adică în semiplane diferite determinate de dreapta AA'). (Fig. 1)
4. O pereche ordonată de puncte (A, B) se numește **Segment orientat sau Vector legat** și se notează $\overrightarrow{AB}$. Punctul A se numește **origine** iar B se numește **vârful** segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$. (Fig. 2)
5. Lungimea segmentului $[AB]$ se numește **modulul** segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$ și se notează $|\overrightarrow{AB}|$.

6. Dreapta AB se numește suportul segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$, iar direcția dreptei AB se numește direcția segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$
7. Două segmente orientate $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ au **aceeași direcție** dacă cele două drepte AB și CD au aceeași direcție.
8. Două segmente orientate $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ au **același sens** dacă semidreptele (AB) și (CD) au același sens.

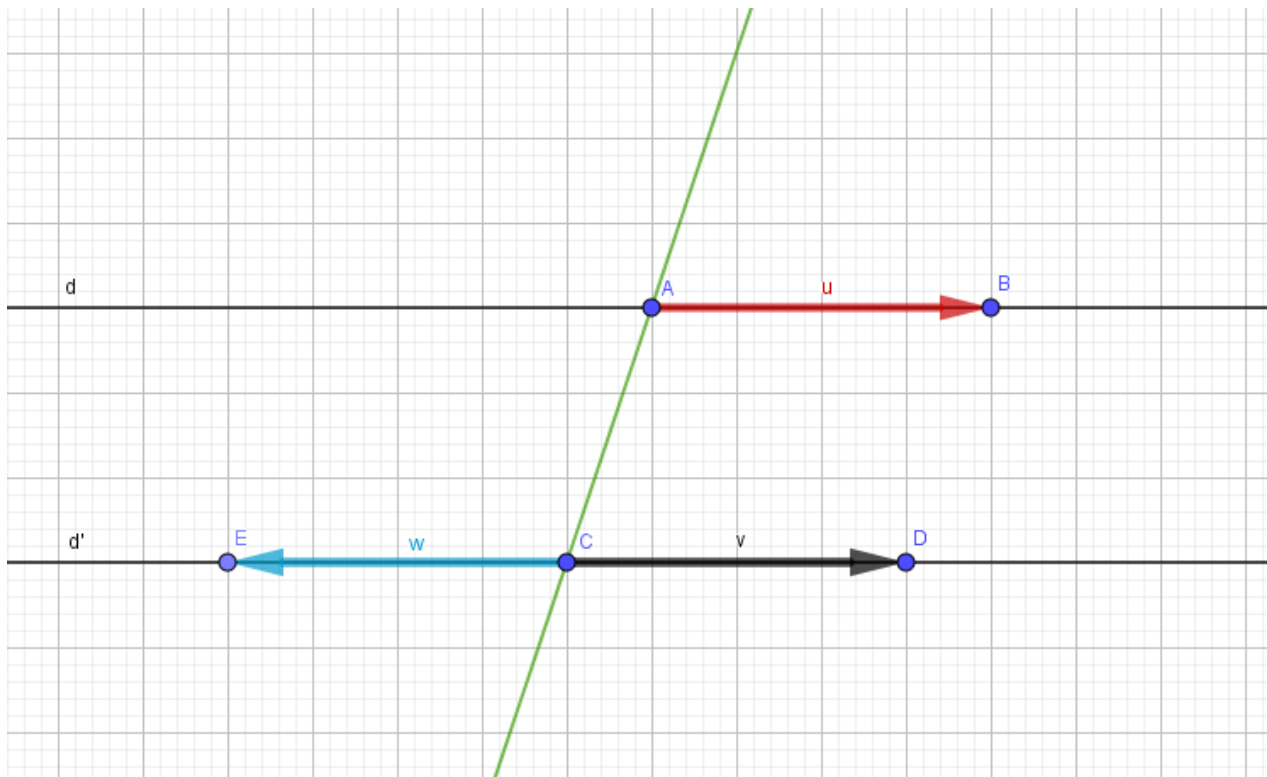
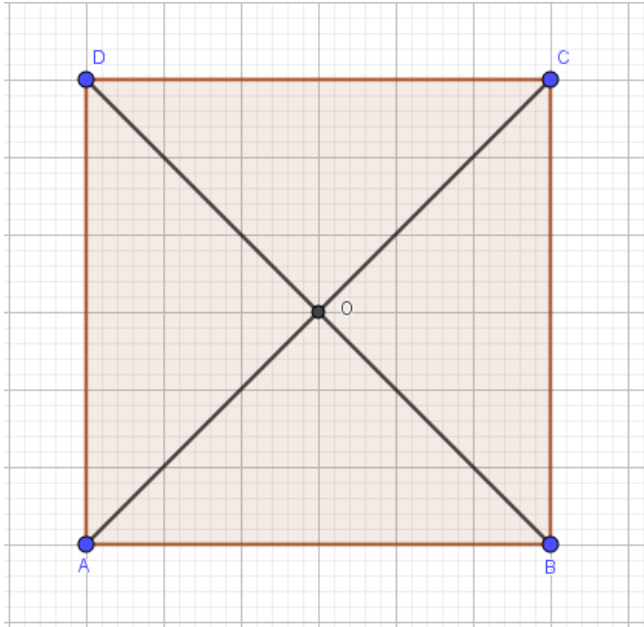


Fig. 2

9. Două segmente orientate se numesc **echipolente** dacă au același modul, aceeași direcție și același sens. **Exemplu:** în fig. 2, $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ sunt echipolente, nu și $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CE}$, acestea având sensuri opuse. Admitem ca notație pentru echipolență semnul " $\sim$ "
10. **Vector liber** este **mulțimea** tuturor segmentelor orientate echipolente cu un singur segment orientat dat. Vectorii liberi se notează cu $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}, \dots, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$
11. Doi vectori se numesc **coliniari** dacă au aceeași direcție.

Exercițiu rezolvat:

1) Se consideră pătratul $ABCD$ și fie O punctul de intersecție al diagonalelor . (fig 3)

Fig.**3**

- Să se scrie semidreptele cu sens opus semidreptei $(AB$ și semidreptei $(DO$
- Să se scrie perechi de semidrepte care au același sens
- Să se scrie segmentele orientate echipolente cu segmentul orientat $\overrightarrow{BC}$.

Rezolvare:

- Semidreptele cu sens opus semidreptei $(AB$ sunt: $(BA$ și $(CD$

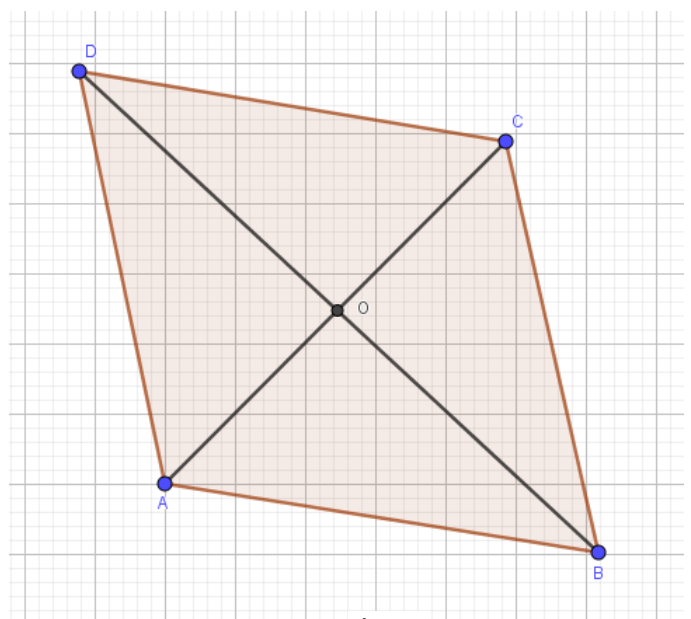
Semidreptele cu sens opus semidreptei $(DO$ sunt: $(OD$ și $(BD$

- Perechi de semidrepte cu același sens sunt: $(AB$ și $(DC$; $(BA$ și $(CD$; $(AD$ și $(BC$; $(DA$ și $(CB$; $(AO$ și $(AC$; $(CO$ și $(CA$; $(BO$ și $(BD$; $(OB$ și $(DB$
- Segmentul orientat echipolent cu segmentul orientat $\overrightarrow{BC}$ este $\overrightarrow{AD}$: au același modul, aceeași direcție și același sens, scriem $\overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{AD}$

Exercițiu temă:

2) Se consideră rombul $ABCD$ și fie O punctul de intersecție al diagonalelor . (fig 4)

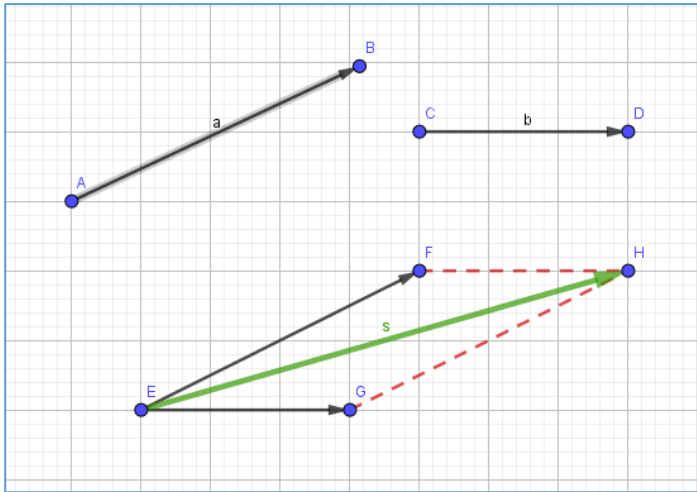
- Să se scrie semidreptele cu sens opus semidreptei $(AD$ și semidreptei $(CO$
- Să se scrie perechi de semidrepte care au același sens
- Să se scrie segmentele orientate echipolente cu segmentul orientat $\overrightarrow{CD}$

**Fig. 4**

ADUNAREA VECTORILOR

Fie $\vec{a}, \vec{b}$ doi vectori în plan, suma lor este vectorul $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$

REGULA PARALELOGRAMULUI



Fie $\overrightarrow{AB}$ reprezentant al vectorului $\vec{a}$ și $\overrightarrow{CD}$ al vectorului $\vec{b}$.

Construim $\overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{EG} \sim \overrightarrow{CD}$

Completăm desenul cu FH și GH , astfel încât figura geometrică să fie un paralelogram : $FH \parallel EG$ și $FH = EG$ la fel $GH \parallel EF$ și $GH = EF$

Suma vectorilor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ respectiv a vectorilor

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \sim \vec{s} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EH}$$

Adică este vectorul diagonală a paralelogramului, cu originea în originea vectorilor adunați, respectiv vectorul $\overrightarrow{EH}$.

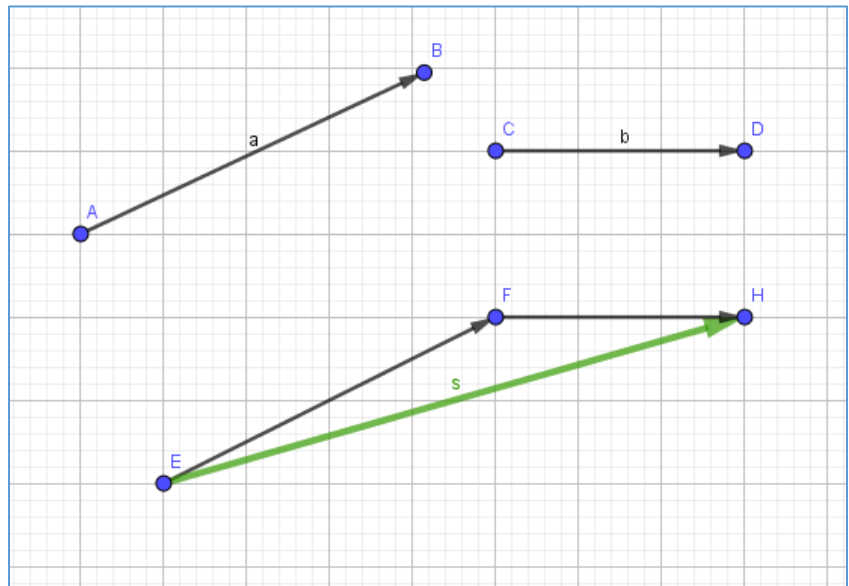
REGULA TRIUNGHIULUI

Fie $\overrightarrow{AB}$ reprezentant al vectorului $\vec{a}$ și $\overrightarrow{CD}$ al vectorului $\vec{b}$.

Construim $\overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{FH} \sim \overrightarrow{CD}$

Suma vectorilor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ respectiv a vectorilor

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \sim \vec{s} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{EH}$$



Adică este vectorul cu originea în originea primului vector adunat și vârful în vârful celui de-al doilea vector adunat, respectiv vectorul $\overrightarrow{EH}$.

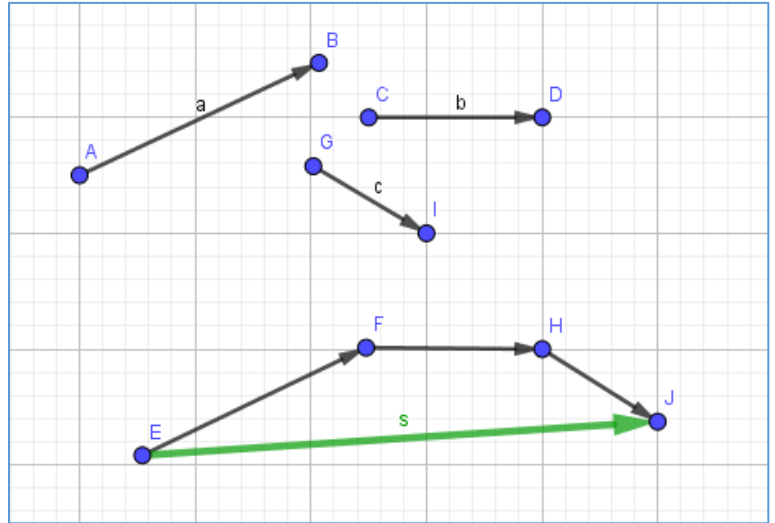
Regula poligonului

Fie $\overrightarrow{AB}$ reprezentant al vectorului $\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}$ al vectorului $\vec{b}$ și $\overrightarrow{GI}$ al vectorului $\vec{c}$.

Construim $\overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FH} \sim \overrightarrow{CD}$ și $\overrightarrow{HJ} \sim \overrightarrow{GI}$

Suma vectorilor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ respectiv a vectorilor

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{GI} \sim \vec{s} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{EJ}$$



Adică este vectorul cu originea în originea primului vector adunat și vârful în vârful ultimului vector adunat, respectiv vectorul $\overrightarrow{EJ}$.

Proprietățile adunării vectorilor

1. **Comutativitate:** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $\forall \vec{a}, \vec{b}$

2. **Asociativitate:** $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

3. Vectorul nul $\vec{0}$ este **element neutru** față de adunarea vectorilor, adică $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$, $\forall \vec{a}$

4. Pentru orice vector $\vec{a}$ există **vectorul opus** notat $-\vec{a}$ (vectorul opus are aceeași lungime, aceeași direcție dar sens opus). Are loc relația $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$, $\forall \vec{a}$

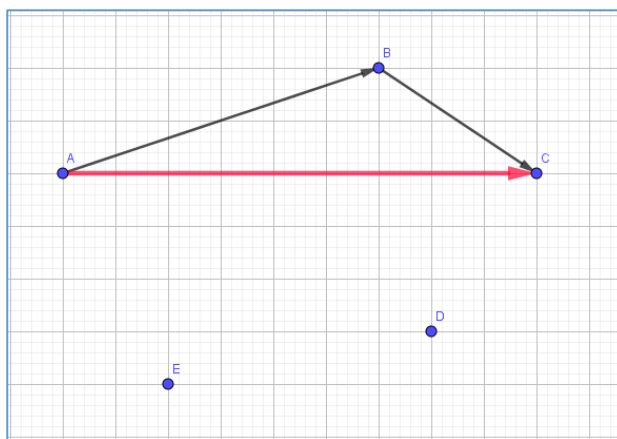
Exercițiu rezolvat:

3) Se consideră punctele distinte: A, B, C, D, E. Să se reprezinte vectorii sumă:

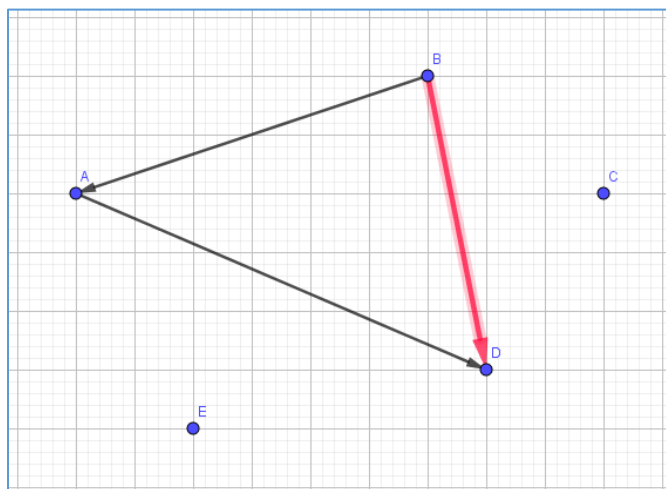
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$; c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CA}$

Rezolvare:

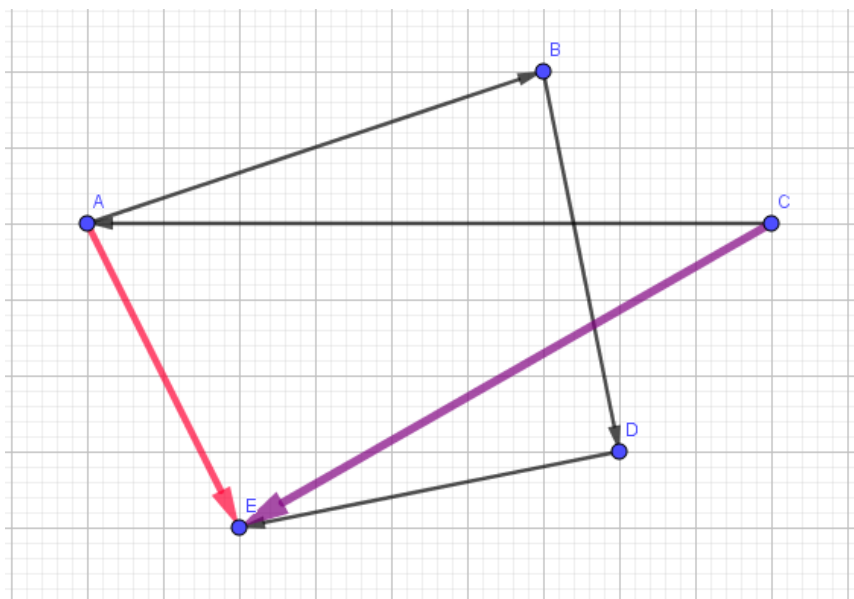
$$a) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



$$b) \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$$



$$c) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}) = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CE}$$



ÎNMULȚIREA VECTORILOR CU SCALARI (NUMERE REALE). VECTORI COLINIARI

1. Fie $\vec{v}$ un vector în plan și $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Vectorul $\alpha \cdot \vec{v}$ este un vector cu aceeași direcție cu $\vec{v}$, modulul este $|\alpha \cdot \vec{v}| = |\alpha| \cdot |\vec{v}|$, același sens cu $\vec{v}$ dacă $\alpha > 0$, sens opus lui $\vec{v}$ dacă $\alpha < 0$, iar pentru $\alpha = 0$ se obține vectorul nul $\vec{0}$.

Exemplu: Fie $\overrightarrow{AB}$

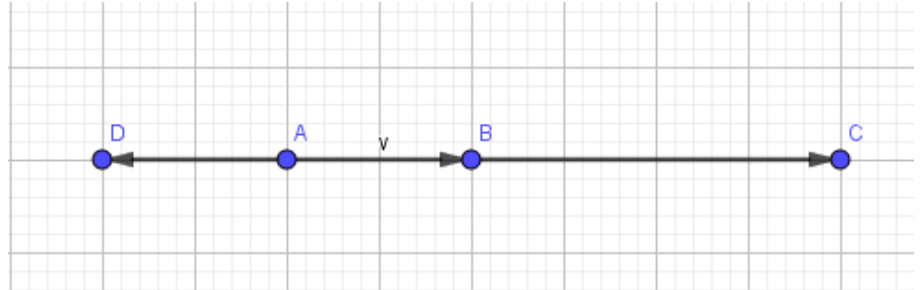
reprezentant al vectorului

$\vec{v}$ atunci vectorul $\overrightarrow{AC}$

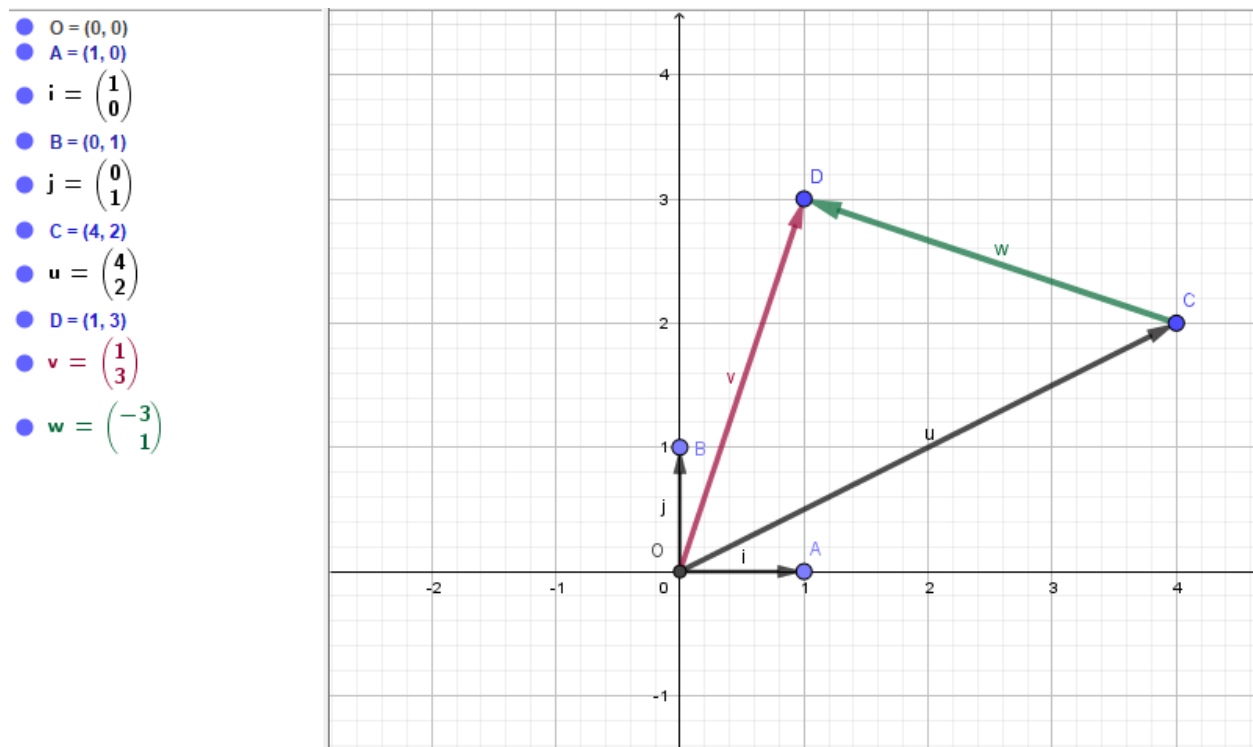
reprezintă vectorul $3 \cdot \vec{v}$

iar vectorul $\overrightarrow{AD}$

reprezintă vectorul $(-1) \cdot \vec{v}$



1. Vectorii $\vec{v}$ și $\alpha \cdot \vec{v}$ sunt **vectori coliniari**
2. Vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari dacă și numai dacă $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$.

DESCOMPUNEREA UNUI VECTOR ÎNTR-UN REPER CARTEZIAN**REPER CARTEZIAN ÎN PLAN. COORDONATELE UNUI VECTOR**

$$O \left(\begin{array}{cc} \underset{\text{abscisa}}{0} & ; & \underset{\text{ordonata}}{0} \end{array} \right) A(5; 7), B(2.5; 1.3)$$

$\{O, OX, OY\}$ reper cartezian OX perpendicular pe OY

$D(x; y)$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} = 4\vec{i} + 3\vec{j} \quad \text{vector de poziție}$$

Definiții:

1. Vectorii $\vec{i}$ de pe axa OX și $\vec{j}$ de pe axa OY , de lungime 1, cu proprietatea de a fi perpendiculari, se numesc **VERSORI**
2. Reperul XOY este format din cele două axe de coordonate OX și OY , O fiind originea comună, iar **reperul cartezian este $(O; \vec{i}; \vec{j})$**
3. Vectorul $\overrightarrow{OM}$, unde $M(x_M; y_M)$ este un punct oarecare în plan, se numește **vector de poziție al punctului M** .
4. Vectorul $\overrightarrow{OM}$ se descompune după direcțiile date de versorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$ astfel :
 $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, numerele reale x, y se numesc coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$
 Sau spunem că $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ este descompunerea lui $\overrightarrow{OM}$ în funcție de versorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$.

Exemplu: în figura de mai sus considerăm punctele : $C(4;2)$ și $D(1;3)$

Atunci vectorii de poziție sunt: $\overrightarrow{OC} = x_C\vec{i} + y_C\vec{j}$ adică $\overrightarrow{OC} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$

iar $\overrightarrow{OD} = x_D\vec{i} + y_D\vec{j}$ adică $\overrightarrow{OD} = 1\vec{i} + 3\vec{j}$

$R(-1; 2)$ $\overrightarrow{OR} = -1\vec{i} + 2\vec{j}$

$$|\overrightarrow{OR}| = \sqrt{(x_R)^2 + (y_R)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$S(-2; 3)$ $\overrightarrow{OS} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$

$$|\overrightarrow{OS}| = \sqrt{(x_S)^2 + (y_S)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

5. **Modulul vectorului $\overrightarrow{OM}$** este $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{(x_M)^2 + (y_M)^2}$

6. Deci un vector oarecare se poate descompune după versorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$

$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$, x și y se numesc coordonatele vectorului, iar

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemplu:

Se dau vectorii $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{b} = -5\vec{i} - \vec{j}$. Să se calculeze $\vec{a} + \vec{b}$ și $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

$$\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + (-5\vec{i} - \vec{j}) = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{i} - \vec{j} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = 2(2\vec{i} + 3\vec{j}) - 3(-5\vec{i} - \vec{j}) = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 15\vec{i} + 3\vec{j} = 19\vec{i} + 9\vec{j}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

7. Dacă avem două puncte $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ atunci vectorul

$\vec{AB} = \vec{OB} + (-\vec{OA})$ adică $\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$ unde $(x_B - x_A)$ și $(y_B - y_A)$ se numesc coordonatele vectorului $\vec{AB}$

Exemplu: în figura de mai sus unde $C(4;2)$ și $D(1;3)$ avem

$$\vec{CD} = (x_D - x_C)\vec{i} + (y_D - y_C)\vec{j}$$

$$\vec{CD} = (1 - 4)\vec{i} + (3 - 2)\vec{j}$$

$$\vec{CD} = -3\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{DC} = (x_C - x_D)\vec{i} + (y_C - y_D)\vec{j}$$

$$\vec{DC} = (4 - 1)\vec{i} + (2 - 3)\vec{j}$$

$$\vec{DC} = 3\vec{i} - \vec{j} \text{ deci } \vec{DC} = -\vec{CD} \text{ adică sunt vectori opuși}$$

Observație: trebuie să fim atenți la ordine pentru că se obțin vectori diferiți

8. Modulul vectorului $\vec{AB}$ este

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = d(A, B)$$

unde $d(A, B)$ este distanța de la A la B

Exemplu:

Dacă luăm un vector căruia i se cunosc coordonatele $\vec{CD} = -3\vec{i} + \vec{j}$

atunci pentru a calcula modului acestui vector folosim formula

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

Dacă știm două puncte de exemplu $A(-5; 2)$, $B(0; -7)$

Pentru a afla modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$ se poate folosi formula

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(0 - (-5))^2 + (-7 - 2)^2} = \sqrt{5^2 + (-9)^2} = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$$

Sau scriem vectorul $\overrightarrow{AB}$ folosind formula $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$

$$\overrightarrow{AB} = (0 - (-5))\vec{i} + (-7 - 2)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} + (-9)\vec{j}$$

și acum calculăm modulul vectorului obținut cu ajutorul formulei

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{deci } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + (-9)^2} = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$$

Exerciții temă

1. Să se calculeze distanța dintre punctele: a) $A(2; 0)$, $B(-1; 3)$

b) $A(-4; 5)$, $B(1; 2)$

9. Operații cu vectori:

Adunarea : dacă avem vectorii $\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ și $\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ atunci

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} \quad \text{iar}$$

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j}$$

Înmulțirea cu un număr a unui vector: dacă avem vectorul $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ și numărul $a \in R$ atunci $a\vec{v} = ax\vec{i} + ay\vec{j}$

Exemplu: Se dau vectorii $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{b} = -5\vec{i} - \vec{j}$. Să se calculeze $\vec{a} + \vec{b}$ și $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

$$\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + (-5\vec{i} - \vec{j}) = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{i} - \vec{j} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = 2(2\vec{i} + 3\vec{j}) - 3(-5\vec{i} - \vec{j}) = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 15\vec{i} + 3\vec{j} = 19\vec{i} + 9\vec{j}$$

Exerciții temă

2. Se dau punctele: $A(0; -5)$, $B(-2; 4)$, $C(-1; -2)$. Să se determine coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BC}$

10. Coordonatele mijlocului unui segment

Fie $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ și $M(x_M; y_M)$ mijlocul segmentului $[AB]$

Coordonatele lui M se calculează astfel:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{și} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Exemplu: fie $A(-3; 0)$, $B(2; -1)$ atunci $M(x_M; y_M)$ mijlocul segmentului $[AB]$ are

$$\text{coordonatele } x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-3 + 2}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{și } y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 - 1}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{deci } M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

11. Coordonatele centrului de greutate al unui triunghi

Fie $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ și $G(x_G; y_G)$ centru de greutate al triunghiului ABC

Coordonatele lui G se calculează astfel:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad \text{și} \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Exemplu: fie $A(-3; 0)$, $B(2; -1)$, $C(0; 5)$ atunci $G(x_G; y_G)$ centru de greutate al triunghiului ABC are coordonatele:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-3 + 2 + 0}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{și } y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{0 - 1 + 5}{3} = \frac{4}{3} \quad \text{deci } G\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$$

Exerciții temă

3. Se dau punctele: $A(2; 5)$, $B(-3; 0)$, $C(-1; -7)$.

a) Să se determine coordonatele mijloacele segmentelor $[AB]$ și $[AC]$.

b) Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC

c) Să se calculeze: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OG}$