

Fișa – 1 – Matrice inversabile în $M_n(\mathbb{R})$, $n \in \{2, 3\}$



- Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$. Matricea A se numește matrice inversabilă dacă există $B \in M_n(\mathbb{C})$, astfel încât $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Matricea B se numește inversa matricei A și se notează A^{-1} .
- O matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ este inversabilă dacă și numai dacă $\det(A) \neq 0$
- Calculul matricei inverse:
 - Se calculează $\det(A)$. Dacă $\det(A) \neq 0$ atunci A este inversabilă și mergem în etapa următoare. Dacă $\det(A) = 0$ atunci A nu este inversabilă și ne oprim.
 - Se determină matricea transpusă A^t .
 - Se determină matricea adjunctă A^* ale cărei elemente sunt complementii algebrici al elementelor matricei transpuse A^t . Complementul algebric al elementului a_{ij} este $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot d_{ij}$, unde d_{ij} este determinantul care se obține din $\det(A^t)$ prin eliminarea liniei i și coloanei j și se numește *minorul* elementului a_{ij} .
 - Se calculează matricea inversă cu formula $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^*$
- Dacă A și B sunt inversabile atunci au loc relațiile: a) $(A^{-1})^{-1} = A$; b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

1.Exercițiu model:

Să se verifice dacă sunt inversabile matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Soluție: Știm că o matrice este inversabilă dacă determinantul ei este diferit de 0.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 5 - (-2) \cdot 3 = -5 + 6 = 1 \neq 0 \text{ deci matricea } A \text{ este inversabilă.}$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (3 + 0 + (-6)) - (0 + 3 + (-6)) = -3 + 3 = 0 \text{ (sau se poate observa că liniile 2}$$

și 3 sunt proporționale, deci determinantul este egal cu 0), rezultă că matricea B nu este inversabilă.

2.Exercițiu model:

Să se determine inversele matricelor: a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{a) } \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \text{ deci } A \text{ este inversabilă; } A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4 \text{ (am eliminat în } \det(A^t) \text{ linia 1 și coloana 1)}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3 \text{ (am eliminat în } \det(A^t) \text{ linia 1 și coloana 2)}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) = 1 \text{ (am eliminat în } \det(A^t) \text{ linia 2 și coloana 1)}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1 \text{ (am eliminat în } \det(A^t) \text{ linia 2 și coloana 1)}$$

$$\text{Deci } A^* = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ iar } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/7 & -3/7 \\ 1/7 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 0 + (-3)) - (0 + 3 + 0) = -3 - 3 = -6 \neq 0 \text{ deci } A \text{ este inversabilă}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \text{ adică } A^* = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) = -3 \text{ (am eliminat în } \det(A^t) \text{ linia 1 și coloana 1)}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 0 = 0 \text{ (am eliminat în } \det(A^t) \text{ linia 1 și coloana 2)}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 = 3 \text{ (am eliminat în } \det(A^t) \text{ linia 1 și coloana 3)}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3) = 3 \text{ (am eliminat în } \det(A^t) \text{ linia 2 și coloana 1)}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 = 0 \text{ (am eliminat în } \det(A^t) \text{ linia 2 și coloana 2)}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3) = 3 \text{ (am eliminat în } \det(A^t) \text{ linia 2 și coloana 3)}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) = -1 \text{ (am eliminat în } \det(A^t) \text{ linia 3 și coloana 1)}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2) = 2 \text{ (am eliminat în } \det(A^t) \text{ linia 3 și coloana 2)}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 = 3 \text{ (am eliminat în } \det(A^t) \text{ linia 3 și coloana 3)}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/(-6) & 0 & 3/(-6) \\ 3/(-6) & 0 & 3/(-6) \\ -1/(-6) & 2/(-6) & 3/(-6) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & -1/3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Exerciții propuse:

1. Să se verifice dacă sunt inversabile matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Determinați inversele matricelor dacă acestea există: a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ d) } D = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezolvarea ecuațiilor matriceale:

Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ și A este o matrice inversabilă, atunci:

1. Soluția ecuației $A \cdot X = B$ este $X = A^{-1} \cdot B$.
2. Soluția ecuației $X \cdot A = B$ este $X = B \cdot A^{-1}$.

Exerciții propuse:

Rezolvați ecuațiile matriceale:

1. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

5. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$