

Vă reamintesc că: **Ecuatiile dreptei în plan** sunt:

-**ecuația generală** este $d: ax + by + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ sau } b \neq 0$ care poate fi scrisă și $d: y = mx + n$ unde m este panta dreptei.

Aplicațiile determinantilor în geometrie

-ecuația dreptei determinată de punctele $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ poate fi scrisă cu determinat:

$$AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

-condiția ca trei puncte $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$ să fie **coliniare** este:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{adică } C \in AB)$$

- aria triunghiului ABC , unde $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$, este

$$A_{(ABC)} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta| \quad \text{unde} \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Exerciții propuse pentru rezolvare în clasă:

1. Să se scrie ecuațiile dreptelor determinate de punctele:

$$A(2; 2), B(3; 3), C(-2; -4).$$

Rezolvare:

$$AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow AB: (x \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot y \cdot 1) - (1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot x + 1 \cdot y \cdot 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow AB: 2x + 6 + 3y - 6 - 3x - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow AB: -x + y = 0$$

$$BC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow BC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$BC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ x & y & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) \cdot 1 + (-2) \cdot y \cdot 1) - (1 \cdot 3 \cdot (-2) + 1 \cdot (-4) \cdot x + 1 \cdot y \cdot 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow BC: (3x - 12 - 2y) - (-6 - 4x + 3y) = 0$$

$$\Leftrightarrow BC: 3x - 12 - 2y + 6 + 4x - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow BC: 7x - 5y - 6 = 0$$

Temă: ecuația dreptei AC

2. Să se arate că punctele $A(-1;5)$, $B(1;1)$, $C(3;-3)$ sunt coliniare.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1 - 3 + 15) - (3 + 3 + 5) = 11 - 11 = 0$$

Rezultă că A,B,C sunt coliniare.

Temă:

Să se arate că punctele $A(-1;5), B(1;1), C(3;-3)$ sunt coliniare.

3. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele

$$AB : x + 2y - 4 = 0 \text{ și } BC : 3x + y - 2 = 0.$$

a) Să se determine coordonatele punctului B.

b) Pentru $A(4;0), B(0;2), C(1;-1)$ să se scrie ecuația medianei triunghiului ABC, duse din vârful C.

c) Pentru $A(4;0), B(0;2), C(1;-1)$ să se calculeze aria triunghiului ABC.

a) Dreptele AB și BC sunt scrise în forma generală

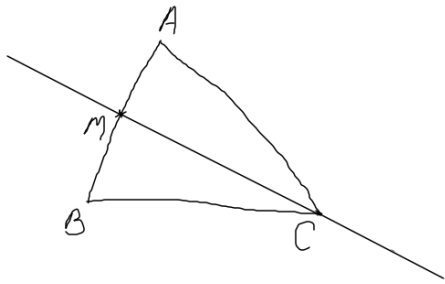
$$B \in AB, B \in BC \Leftrightarrow AB \cap BC = \{B\}$$

Pentru a afla coordonatele lui B, scriem și rezolvăm sistemul format din cele două ecuații (ale dreptelor date), care este un sistem de două ecuații și două necunoscute. Avem două metode la dispoziție: metoda substituției și metoda reducerii.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + 4 \\ 3(-2y + 4) + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + 4 \\ -6y + 12 + y - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + 4 \\ -5y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \cdot 2 + 4 = -4 + 4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Rezultă că $B(0, 2)$.

b) Pentru $A(4;0), B(0;2), C(1;-1)$ să se scrie ecuația medianei triunghiului ABC, duse din vârful C.



$M(x_M, y_M)$ mijlocul segmentului AB

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4 + 0}{2} = 2$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + 2}{2} = 1 \quad \text{deci } M(2, 1)$$

$C(1, -1)$ $M(2, 1)$

$$CM : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_M & y_M & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow CM : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$CM : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$CM : (x \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot y \cdot 1) - (1 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot y \cdot 1) = 0$$

$$CM : (-x + 1 + 2y) - (-2 + x + y) = 0$$

$$CM : -x + 1 + 2y + 2 - x - y = 0$$

$$CM : -2x + y + 3 = 0$$



c) Pentru $A(4;0), B(0;2), C(1;-1)$ să se calculeze aria triunghiului

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\Delta| \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (8 + 0 + 0) - (2 + (-4) + 0) = 8 - (-2) = 8 + 2 = 10$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\Delta| = \frac{1}{2} |10| = \frac{1}{2} 10 = 5$$

4. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0;0)$ și $A_n(n+1; 3n-2)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se scrie ecuația dreptei determinată de punctele A_1 și A_2 .

$$A_1(1+1, 3 \cdot 1 - 2) \Leftrightarrow A_1(2, 1)$$

$$A_2(3, 4)$$

$$A_0(1, -2)$$

$$A_1 A_2 : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

temă

b) Să se calculeze aria triunghiului OA_0A_1 . **temă**

Temă

1. Să se scrie ecuațiile dreptelor determinate de punctele: $A(-2;4)$, $B(0,-2)$, $C(3;1)$.
2. Să se arate că punctele $A(-1;5)$, $B(1;1)$, $C(3;-3)$ sunt coliniare.
3. Să se determine valoarea parametrului real m pentru care punctele $A(2;m)$, $B(m;m+2)$, $C(3;-1)$ sunt coliniare.
4. Se calculeze aria triunghiului ABC , unde $A(0;2)$, $B(-3;1)$, $C(4;-2)$.
5. Fie punctele $A(1;-5)$, $B(3;4)$, $C(1;7)$. Calculați ariile triunghiurilor AOB , AOC , BOC și ABC , unde $O(0,0)$ este originea reperului cartezian XOY .
6. Se consideră punctele: $A(2,4)$, $B(-2,6)$, $C(4,-6)$, $D(x,-x)$, $x \in \mathbb{R}$. Să se determine numărul real x astfel încât aria triunghiului ABD să fie egală cu aria triunghiului BCD .