

Fișă de lucru - Determinanți. Proprietățile determinanților

Determinantul unei matrice pătratice de ordin cel mult 3

-Dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ atunci sistemul ordonat de numere $\{a_{11}; a_{22}\}$ formează

diagonala principală, iar sistemul ordonat de numere $\{a_{12}; a_{21}\}$ formează diagonala secundară.

-Dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ atunci sistemul ordonat de numere $\{a_{11}; a_{22}; a_{33}\}$

formează diagonala principală, iar sistemul ordonat de numere $\{a_{13}; a_{22}; a_{31}\}$ formează diagonala secundară.

1. Dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ atunci numărul $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
se numește derminantul de ordinul 2

(adică **Regula:** determinantul de ordinul 2 este = produsul elementelor de pe diagonala principală – produsul elementelor de pe diagonala secundară)

Exemplu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 0 = -2 - 0 = -2$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det C = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) - (-2) \cdot 1 = 2 + 2 = 4$$

Fișă de lucru - Determinanți. Proprietățile determinanților

2. Dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ atunci numărul $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

se numește determinantul de ordinul 3.

Determinantul de ordinul 3 se calculează cu ajutorul regulii lui Sarrus

Regula lui Sarrus

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Regula lui Sarrus:

-imediat sub determinant, se copiază linia 1 și linia 2 (fără a prelungi determinantul)

-determinantul de ordinul 3 = suma produselor elementelor de pe diagonalele principale – suma produselor elementelor de pe diagonalele secundare

Exemplu:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \left((-1) \cdot 1 \cdot 3 + \overbrace{0 \cdot 2}^0 + (-2) \cdot 1 \cdot (-1) \right) - \\
 \left(2 \cdot 1 \cdot (-2) + \underbrace{(-1) \cdot 0 \cdot (-1)}_0 + \underbrace{3 \cdot 1 \cdot 0}_0 \right) \\
 = (-3 + 4) - (-4) \\
 = 1 + 4 \\
 = 5$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \left(1 \cdot (-1) \cdot 3 + \overbrace{5 \cdot 1 \cdot 2}^0 + (-2) \cdot 0 \cdot (-1) \right) - \\
 \left(2 \cdot (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + \underbrace{3 \cdot 0 \cdot 5}_0 \right) \\
 = (-3 + 10) - (4 - 1) \\
 = 7 - 3 \\
 = 4$$

OBS. Veți exersa calculul determinantilor verificând proprietățile acestora!!!

Proprietățile determinantilor

P1. Determinantul unei matrice pătratice coincide cu determinantul matricei transpuse

$$\det(A) = \det(A^t), A \in M_n(\mathbb{C})$$

Clasa a XI-a M2

Prof. Cornelia Mestecan

Fișă de lucru - Determinanți. Proprietățile determinanților

Exemplu:

Rezolvare:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 0 + 1 = 1$$

$$\det A^t = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 = 0 + 1 = 1 \quad \text{rezultă că } \det A = \det A^t$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \left(1 \cdot 3 \cdot (-2) + \overbrace{0 \cdot 1 \cdot (-1)}^0 + (-2) \cdot 2 \cdot 1 \right) - \\ &\quad \left((-1) \cdot 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \cdot \underbrace{0}_0 \right) \\ &= (-6 - 4) - (6 + 1) \\ &= -10 - 7 \\ &= -17 \end{aligned}$$

Fișă de lucru - Determinanți. Proprietățile determinantilor

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det B^t = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1 \cdot 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 \cdot 1)$$

$$-((-2) \cdot 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 \cdot 2) = (-6 - 4) - (6 + 1) \\ = -10 - 7 = -17$$

Rezultă că $\det B = \det B^t$

T1. Fie matricile $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Verificați proprietatea **P1**.

P2. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice pătratică sunt nule, atunci determinantul matricei este nul.

Exemplu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (1 \cdot 0 \cdot 5 + (-2) \cdot 0 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot 1) - \\ (2 \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot (-2)) = 0 - 0 = 0$$

T2. Dați exemplu de matrice în condițiile proprietății 2 și verificați proprietatea.

P3. Dacă într-o matrice pătratică, schimbăm două linii (sau coloane) între ele, obținem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei inițiale.

Exemplu:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ am schimbat două linii între ele}$$

Fișă de lucru - Determinanți. Proprietățile determinantilor

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = -2$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 2 - 0 = 2 \quad \text{rezultă că } \det B = -\det A$$

T3. Dați exemplu de matrice pătratică de ordinul 3

Grupa 1- schimbați două linii între ele și verificați proprietatea,

Grupa 2- schimbați două coloane între ele și verificați proprietatea.

P4. Dacă o matrice pătratică are două linii (sau coloane) identice, atunci determinantul său este nul.

Exemplu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - (-2) \cdot 1 = -2 - (-2) = -2 + 2 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \cdot 2 \cdot 0}^0 + \underbrace{(-3) \cdot 4 \cdot 1}_{-12} + \underbrace{0 \cdot 0 \cdot (-3)}_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \underbrace{1 \cdot 0 \cdot 0}_0 + \underbrace{(-3) \cdot 4 \cdot 1}_{-12} + \underbrace{0 \cdot 0 \cdot (-3)}_0 \end{pmatrix}$$

$$= (-12) - (-12)$$

$$= -12 + 12$$

$$= 0$$

T4. Dați

exemplu de matrice în condițiile proprietății 4 și verificați proprietatea: Grupa 1 – coloane, Grupa 2 – linii

P5. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) ale unei matrici pătratice, sunt înmulțite cu un număr α , obținem o matrice al cărei determinant este egal cu α înmulțit cu determinantul matricii inițiale.

T5. Fie matricele: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$

Fișă de lucru - Determinanți. Proprietățile determinanților

Calculații determinanții matricelor și descrieți ce observați și în ce mod se poate aplica proprietatea 5.

P6. Dacă elementele a două linii (sau coloane) ale unei matrice pătratice sunt proporționale, atunci determinantul matricei este nul.

T6. Observați această proprietate la exemplul de la T5. Dați exemplu de alte două matrice în condițiile prop. 6 și verificați proprietatea.

P7. Dacă la o linie (sau coloană) a matricei pătratice A , adunăm elementele altei linii (sau coloane) înmulțite cu același număr, atunci această matrice are același determinant ca și matricea A .

T7. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Înmulțiți linia 2 cu 2 și adunați la linia 1. Ce matrice

obțineți? Calculați determinanții celor două matrice și verificați dacă sunt egali.

P8. $\det(I_n) = 1$ (în cuvinte: determinantul matricei unitate este =1)

T8. Verificați acasă pentru $n=2$ și $n=3$

P9. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$, $A \in M_n(\mathbb{C})$.

T9. Verificați acasă pentru a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$ și $\alpha = 2$;

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $\alpha = -2$.

P10. Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, atunci $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

În particular $\det(A^n) = (\det(A))^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

T10. Verificați acasă pentru

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$, $n=2$.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $n=2$.