

Definiții

Definiție 1.

Fie mulțimea $I_{mn} = \{(i, j) / 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$. O funcție $A: I_{mn} \rightarrow K$ (K fiind una din mulțimile $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) se numește matrice de tipul (m, n) . Valorile $A(i, j)$ se notează a_{ij} și se numesc elementele matricei. Numărul i se numește indice de linie, iar j se numește indice de coloană.

Matricea A se scrie sub forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ adică un tablou cu } m \text{ linii și } n \text{ coloane.}$$

Notăție prescurtată $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

Notăm cu $M_{mn}(K) = \text{mulțimea matricelor de tipul } (m, n) \text{ cu elemente în } K$ și cu $M_n(K) = \text{mulțimea matricelor pătratice de ordinul } n \text{ cu elemente în } K$.

Observații:

-o matrice cu o singură linie se numește *matrice linie*, ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$
 -matrice de tipul $(1, 3)$

-o matrice cu o singură coloană se numește *matrice coloană*, ex: $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

-matrice de tipul $(4, 1)$

-matricea cu toate elementele zero se numește *matrice nulă* și se notează cu O_{mn} ($O_{nn} = O_n$)

Ex: $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - matricea nulă de ordinul 2 sau $O_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ -matricea nulă de

tipul $(3, 2)$

-matricea în care pe diagonala principală este 1 ($a_{ii} = 1, i = 1, 2, 3, \dots, n$) și în rest este 0, se numește *matricea unitate de ordinul n* și se notează cu I_n .

$$\text{Ex: } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{matricea unitate de ordinul 3.}$$

Definiție 2.

$$\text{Fie } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{mn}(K). \text{ Matricea } {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{nm}(K), \text{ se numește}$$

transpusa matricei A. (Se observă că transpusa se obține prin schimbarea liniilor în coloane sau a coloanelor în linii).

$$\text{Ex: } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ atunci matricea transpusă este } {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definiție 3.

Două matrice sunt egale dacă sunt de același tip și au toate elementele respectiv egale.

Definiție 4.

$$\text{Fie matricea } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{mn}(K), \text{ numim } \textit{opusa matricei A},$$

matricea

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exerciții:

$$1. \text{ Scrieți transpusele matricelor : } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -9 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Determinați numerele reale x, y, z pentru care matricele următoare sunt egale:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x+3 \\ -y+2 & 3z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Operații cu matrice

Adunarea a două matrice. Înmulțirea unei matrice cu un scalar

Definiție

Fie matricele $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{mn}(K)$ și $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{mn}(K)$.

$$K: \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

Suma lor este matricea $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{mn}(K)$,

Produsul dintre scalarul $k \in K$ și matricea A este matricea $kA = (ka_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{mn}(K)$.

Diferența matricelor A și B este $A - B = A + (-B)$.

Exerciții:

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați matricele:

$2A$; $A + B$; $2A + 3B$; $A - B$; $2A - 3B$; $-5B$; $B + A$; $A + O_3$; $(A + B) - 2A$.

$$\text{Ex: } A + B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2+0 & -2+3 & 0+(-2) \\ 1+0 & 1+(-2) & -1+1 \\ 3+(-3) & 0+4 & -4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2A - 3B &= 2A + (-3)B = 2 \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} + (-3) \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 6 & 0 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -9 & 6 \\ 0 & 6 & -3 \\ 9 & -12 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -13 & 6 \\ 2 & 8 & -5 \\ 15 & -12 & -11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$2.A, B \in M_{2,3}(\mathbb{Z}) \Rightarrow A + B \in M_{2,3}(\mathbb{Z})$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 2 & -5 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$2(A + B) = ?$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 2 & -5 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2(A + B) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 16 \\ 6 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A - B &= A + (-1)B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 2 & -5 & 9 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 2 & -5 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 8 \\ 1 & -9 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Înmulțirea a două matrice

Definiție

Fie matricele $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{mn}(K)$ și $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} \in M_{np}(K)$, adică

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}. \text{ Produsul lor notat cu } AB \text{ este matricea}$$

$$C = (c_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq p}} \in M_{mp}(K) \text{ unde}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{n2} \\ &\vdots \\ c_{1p} &= a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \dots + a_{1n}b_{np} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observație: pentru a se putea înmulți două matrice, trebuie ca numărul de coloane de la prima matrice să fie egal cu numărul de linii de la a doua matrice!!!! Matricea produs are numărul de linii egal cu numărul de linii al primei matrice și numărul de coloane egal cu numărul de coloane al celei de-a doua matrice.

$$\text{Ex: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ matrice de tipul } (2,3), B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ matrice de tipul } (3,2)$$

$$\text{Matricea produs } C = AB \text{ va fi de tipul } (2,2), C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$c_{11} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) + (-3) \cdot 0 = 1 + 0 + 0 = 1$ **am înmulțit** elementele de pe prima linie din A cu elementele de pe prima coloană din B astfel: **primul ori primul + al doilea ori al doilea + al treilea ori al treilea,**

$$c_{12} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) = 2 + 0 + 3 = 5$$

$$c_{21} = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 = -1 - 3 + 0 = -4$$

$$c_{22} = (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -2 + 1 - 2 = -3$$

$$\text{Deci } C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

SAU pentru o scriere mai ușoară, lucrăm direct în matricea rezultat

Cum înmulțim:

-pentru elementul de pe poziția 1-1: înmulțim linia 1 din prima matrice cu coloana 1 din a doua matrice: primul element ori primul+al doilea element ori al doilea+al treilea ori al treilea

-pentru elementul de pe poziția 1-2: înmulțim linia 1 din prima matrice cu coloana 2 din a doua matrice: primul element ori primul+al doilea element ori al doilea+al treilea ori al treilea

-pentru elementul de pe poziția 2-1: înmulțim linia 2 din prima matrice cu coloana 1 din a doua matrice: primul element ori primul+al doilea element ori al doilea+al treilea ori al treilea

-pentru elementul de pe poziția 2-2: înmulțim linia 2 din prima matrice cu coloana 2 din a doua matrice: primul element ori primul+al doilea element ori al doilea+al treilea ori al treilea

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) + (-3) \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 & (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0+0 & 2+0+3 \\ -1-3+0 & -2+1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

În cazul nostru se poate calcula și BA pentru că este îndeplinită condiția: B de tipul $(3,2)$ și A de tipul $(2,3)$, rezultă $D=BA$ de tipul $(3,3)$

Pentru o scriere mai ușoară, lucrăm direct în matricea rezultat

Cum înmulțim:

-pentru elementul de pe poziția 1-1: înmulțim linia 1 din prima matrice cu coloana 1 din a doua matrice: primul element ori primul+al doilea element ori al doilea

-pentru elementul de pe poziția 1-2: înmulțim linia 1 din prima matrice cu coloana 2 din a doua matrice: primul element ori primul+al doilea element ori al doilea

-pentru elementul de pe poziția 1-3: înmulțim linia 1 din prima matrice cu coloana 3 din a doua matrice: primul element ori primul+al doilea element ori al doilea

-pentru elementul de pe poziția 2-1: înmulțim linia 2 din prima matrice cu coloana 1 din a doua matrice: primul element ori primul+al doilea element ori al doilea

-pentru elementul de pe poziția 2-2: înmulțim linia 2 din prima matrice cu coloana 2 din a doua matrice: primul element ori primul+al doilea element ori al doilea

-pentru elementul de pe poziția 2-3: înmulțim linia 2 din prima matrice cu coloana 3 din a doua matrice: primul element ori primul+al doilea element ori al doilea

$$\begin{aligned}
 BA &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 \\ (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 1 & (-3) \cdot (-3) + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1-2 & 0+2 & -3+4 \\ -3-1 & 0+1 & 9+2 \\ 0+1 & 0-1 & 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 11 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Observație: în general $AB \neq BA$, adică înmulțirea matricelor nu este comutativă!!!

Exerciții:

1. Fie matricele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Se cere:

a) determinați matricele AB ; BA ; $AB + BA$;

b) **TEMĂ:** determinați matricele AC , CA , $AC - CA$ și CD , DA , $CD + DA$ folosind modelul de la a)

c) determinați matricele A^2 ; D^3 unde $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n$

d) **TEMĂ:** determinați matricele B^2 , C^3 folosind modelul de la c)

Rezolvare:

a) Avem de înmulțit două matrice pătratice de ordinul 2, rezultatul va fi tot o matrice pătratică de ordinul 2

Cum facem înmulțirile:

-pentru elementul de pe poziția 1-1: înmulțim linia 1 din prima matrice cu coloana 1 din a doua matrice: primul element ori primul+al doilea element ori al doilea

-pentru elementul de pe poziția 1-2: înmulțim linia 1 din prima matrice cu coloana 2 din a doua matrice: primul element ori primul+al doilea element ori al doilea

-pentru elementul de pe poziția 2-1: înmulțim linia 2 din prima matrice cu coloana 1 din a doua matrice: primul element ori primul+al doilea element ori al doilea

-pentru elementul de pe poziția 2-2: înmulțim linia 2 din prima matrice cu coloana 2 din a doua matrice: primul element ori primul+al doilea element ori al doilea

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ (-2) \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 & (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -3 + 0 & 2 + 0 \\ 6 - 1 & -4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & (-3) \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -3 - 4 & 0 - 2 \\ 1 - 2 & 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pentru a aduna matricele obținute procedăm astfel: se adună elementele de pe fiecare poziție:

$$AB + BA = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + (-7) & 2 + (-2) \\ 5 + (-1) & -5 + (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

S-a ținut cont de regula de adunare (**însuare**) a numerelor:

-dacă însumăm două numere cu același semn, facem adunarea numerelor și dăm semnul lor comun

-dacă însumăm două numere ce semn opus, facem scăderea numărului mai mic din cel mai mare (în valoare absolută, adică fără semn) și dăm semnul celui mai mare

c) Avem de calculat puteri

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ și } A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Deci

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) & (-2) \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 0 & 0 + 0 \\ -2 + 2 & 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^3 = D \cdot D \cdot D = D^2 \cdot D$$

Deci calculăm mai întâi pe D^2 și apoi pe D^3

$$D^2 = D \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 0 \\ (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) & (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 + (-6) & 3 + 0 \\ -2 + 0 & (-6) + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 D^3 &= D^2 \cdot D = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (-5) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) & (-5) \cdot 3 + 3 \cdot 0 \\ (-2) \cdot 1 + (-6) \cdot (-2) & (-2) \cdot 3 + (-6) \cdot 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (-5) + (-6) & (-15) + 0 \\ -2 + 12 & (-6) + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -15 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2. Să se calculeze $f(A)$, știind că :

a) $f(A) = A^2 - 3A + 5I_2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cum procedăm: se calculează mai întâi A^2 apoi se înlocuiește în $f(A)$ și se fac calculele, ținându-se cont de faptul că avem și înmulțirea unei matrice cu un număr, care se face pe fiecare poziție

$$\begin{aligned}
 A^2 &= A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ (-3) \cdot 2 + 0 \cdot (-3) & (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 4 + (-3) & 2 + 0 \\ -6 + 0 & (-3) + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(A) &= A^2 - 3A + 5I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 - 6 + 5 & 2 - 3 + 0 \\ -6 - (-9) + 0 & -3 - 0 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

b) **TEMĂ:** $f(A) = 2A^2 - I_2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ folosind modelul de la a)

c) **TEMĂ:** $f(A) = A^2 + 2A - 6I_3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ folosind modelul de la a)

3. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că $AB = BA$ și $A^2 = 4A$.

Indicație: se calculează separat AB , BA și apoi se compară rezultatele. Se calculează apoi A^2 și $4A$ care se compară.

4. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ a & b \end{pmatrix}$. Aflați a și b astfel încât $AX = XA$.

Indicație: se calculează separat AX , XA și apoi se egalează rezultatele. Știm că două matrice sunt egale dacă este egalitate pe poziții, deci se egalează pe poziții și se determină a și b .