

Breviar teoretic

Inecuația de gradul II $ax^2 + bx + c \leq 0$ ($\geq 0, < 0, > 0$), $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Rezolvarea inecuației de gradul II se rezolvă cu ajutorul semnului funcției de gradul II

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$$

Etape în rezolvare:

1. Atașăm ecuația de gradul II $ax^2 + bx + c = 0$ și rezolvăm
2. Realizăm tabelul cu semnul funcției de gradul II corespunzătoare
3. Din tabel alegem și scriem soluția inecuației

Exercițiu rezolvat:

1) Să se rezolve inecuația în mulțimea numerelor reale: $x^2 + 5x - 14 \leq 0$

Rezolvare:

1. Atașăm ecuația și o rezolvăm

$$x^2 + 5x - 14 = 0, \quad a = 1, b = 5, c = -14$$

$$\begin{array}{ll} \Delta = b^2 - 4ac & x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14) & x_1 = \frac{-5 - \sqrt{81}}{2 \cdot 1} \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{81}}{2 \cdot 1} \\ \Delta = 25 + 56 & x_1 = \frac{-5 - 9}{2} \quad x_2 = \frac{-5 + 9}{2} \\ \Delta = 81 > 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R} & x_1 = \frac{-14}{2} \quad x_2 = \frac{4}{2} \\ & x_1 = -7 \quad x_2 = 2 \end{array}$$

2. Tabelul de semn pentru funcția $f(x) = x^2 + 5x - 14, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Cum $\Delta > 0$ funcția f are semn opus lui a între rădăcini și semnul lui a înafara lor

$$a = 1 > 0 \quad \text{și} \quad -7 < 2$$

x	$-\infty$		-7		2		$+\infty$	
$f(x)$		+	+	0	-	0	+	+

3. Citim tabelul și alegem soluția: avem de rezolvat inecuația $x^2 + 5x - 14 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$ observăm în tabel că $f(x) \leq 0$ pentru $x \in [-7; 2]$ (paranteze pătrate pentru că inegalitatea este cu egal).

Deci soluția inecuației este $S = [-7; 2]$

Exerciții propuse:**2)** Să se rezolve inecuațiile în mulțimea numerelor reale:

a) $x^2 - 7x + 10 > 0$; b) $-2x^2 + 3x - 1 \leq 0$; c) $3x^2 - x - 10 < 0$; d) $x^2 - 3 \geq 0$

Exercițiu rezolvat:**3)** Să se rezolve inecuația în mulțimea numerelor reale: $4x^2 - 3x + 5 \leq 0$

Rezolvare:

1. Atașăm ecuația și o rezolvăm

$$4x^2 - 3x + 5 = 0, \quad a = 4, b = -3, c = 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5$$

$$\Delta = 9 - 80$$

$$\Delta = -71 < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$$

2. Tabelul de semn pentru funcția $f(x) = 4x^2 - 3x + 5, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Cum $\Delta < 0$ funcția f are semnul lui a peste tot

$$a = 4 > 0$$

x	$-\infty$ $+\infty$						
$f(x)$	+	+	+	+	+	+	+

3. Citim tabelul și alegem soluția: avem de rezolvat inecuația $4x^2 - 3x + 5 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$ observăm în tabel că $f(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, adică nu este niciunde negativă.

Deci soluția inecuației este $S = \emptyset$ (mulțime vidă)**Observație :**-dacă inecuația era $4x^2 - 3x + 5 > 0$, atunci din tabel rezulta că $S = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ **Exerciții propuse:****4)** Să se rezolve inecuațiile în mulțimea numerelor reale:

a) $-x^2 + x - 3 > 0$; b) $x^2 - x + 1 > 0$

-dacă inecuatia era $-9x^2 + 6x - 1 > 0$, atunci solutia era $S = \Phi$

Exerciții propuse:

6) Să se rezolve inecuațiile în mulțimea numerelor reale:

a) $-x^2 + 4x - 4 > 0$; b) $x^2 - 2x + 1 > 0$; c) $-x^2 + 10x - 25 \leq 0$

Exercițiu rezolvat

7) Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x - 15$, $g(x) = -2x^2 + 2x - 10$

Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $f(x) \geq g(x)$.

Rezolvare:

$$f(x) \geq g(x)$$

$$x^2 + 4x - 15 \geq -2x^2 + 2x - 10$$

$$x^2 + 4x - 15 + 2x^2 - 2x + 10 \geq 0$$

$$3x^2 + 2x - 5 \geq 0$$

atasăm ecuația de gradul II: $3x^2 + 2x - 5 = 0$, $a = 3, b = 2, c = -5$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{64}}{2 \cdot 3}$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2 \cdot 3}$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)$$

$$x_1 = \frac{-2 - 8}{6}$$

$$x_2 = \frac{-2 + 8}{6}$$

$$\Delta = 4 + 60$$

$$\Delta = 64 > 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$x_1 = \frac{-10}{6}$$

$$x_2 = \frac{6}{6}$$

$$x_1 = -\frac{5}{3}$$

$$x_2 = 1$$

Tabelul de semn : Cum $\Delta > 0$ funcția f are semn opus lui a între rădăcini și semnul lui a înafara lor

$$a = 3 > 0 \quad \text{și} \quad -\frac{5}{3} < 1$$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	1	$+\infty$			
$3x^2+2x-5$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

Citim tabelul și alegem soluția: avem de rezolvat inecuația $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 5 \geq 0$ observăm

în tabel că $3x^2 + 2x - 5$ pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right] \cup [1, +\infty)$

Deci soluția inecuației $f(x) \geq g(x)$ este $S = \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right] \cup [1, +\infty)$.

Exerciții propuse:

8) Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^2 - 2x + 7$, $g(x) = -4x^2 + 2x + 12$

Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $f(x) < g(x)$.

9) Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$, $g(x) = -2x + 1$

Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $f(x) \geq g(x)$.