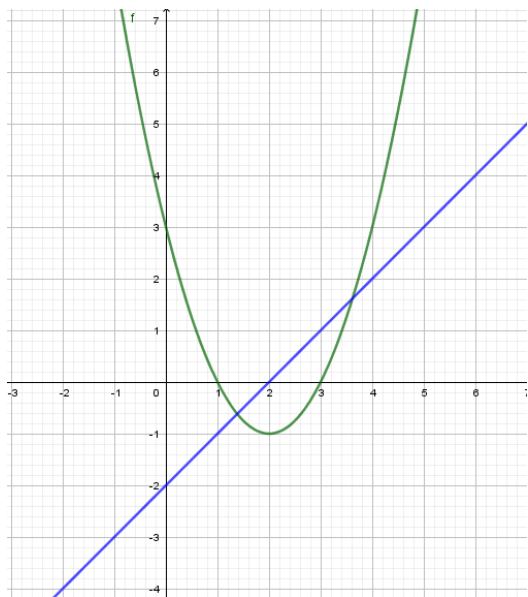
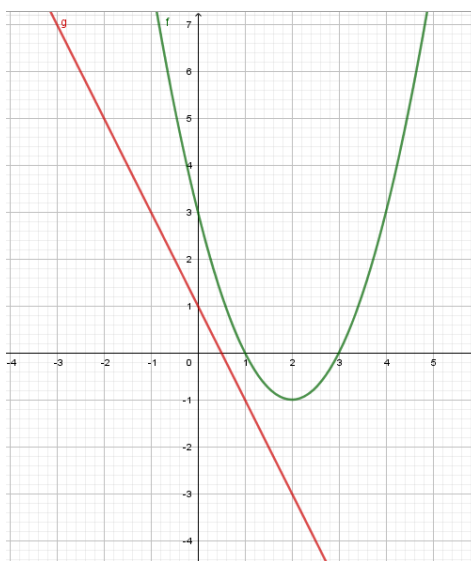


Fisă de lucru: Poziția unei drepte față de o parabola. Sisteme de ecuații**Breviar teoretic:**

- Graficul unei funcții de gradul I, de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = px + q$, $p, q \in \mathbb{R}, p \neq 0$ este o dreaptă de ecuație: $y = px + q$, $p, q \in \mathbb{R}$
- Graficul unei funcții de gradul II, de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ este o parabolă de ecuație: $y = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$
- O dreaptă poate intersecta o parabolă în cel mult două puncte, după cum se poate observa în figurile următoare:

a) Niciun punct de intersecție
pentru graficele funcțiilor

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 3 \\ g(x) &= -2x + 1 \end{aligned}$$



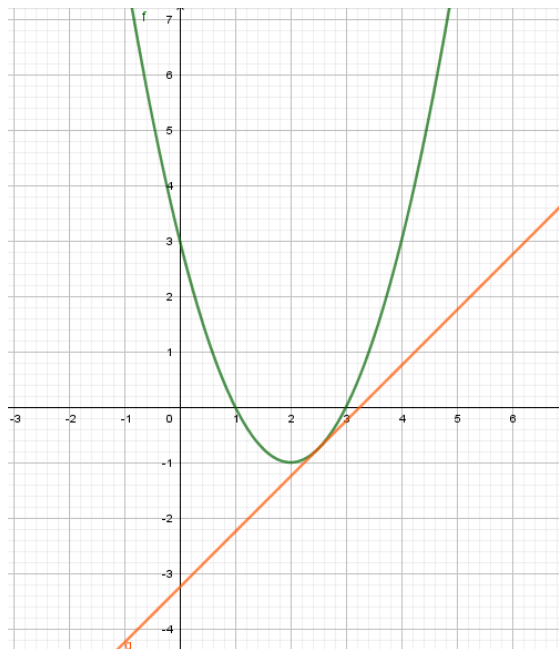
b) 2 puncte de intersecție pentru funcțiile

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 3 \\ h(x) &= x - 2 \end{aligned}$$

- c) Un singur punct de intersecție pentru funcțiile

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$g(x) = x - 3.25$$



Cum aflăm aceste puncte de intersecție ale graficelor, respectiv ale dreptelor cu parabolele corespunzătoare????

Se rezolvă sistemul format din cele două ecuații

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = px + q \end{cases}$$

-se egalează cele două expresii cu x , se obține o ecuație de gradul II care se rezolvă

-apoi se calculează y

În urma rezolvării sistemului avem trei cazuri posibile:

Cazul 1. Ecuația de gradul II, de mai sus are **delta strict mai mare decât 0**, deci ecuația are **două soluții reale și diferite**. Prin urmare sistemul are două soluții diferite, respectiv **dreapta intersectează parabola în două puncte, adică dreapta este secant parabolei**.

Cazul 2. Ecuația de gradul II, de mai sus are **delta egal cu 0**, deci ecuația are **două soluții reale și egale**. Prin urmare sistemul are două soluții egale, respectiv **dreapta intersectează parabola într-un singur punct, adică dreapta este tangent parabolei**.

Cazul 3. Ecuația de gradul II, de mai sus are **delta mai mic decât 0**, deci ecuația **nu are soluții reale**. Prin urmare sistemul are ca soluție mulțimea vidă (adică nu are nicio soluție), respectiv **dreapta nu intersectează parabola în niciun punct, adică dreapta este exterioară parabolei**.

Exercițiu rezolvat:

1. Să se precizeze poziția dreptei $d : y = 5x - 2$ și parabola de ecuație: $y = x^2 - x + 3$.

Rezolvare:

$$\text{Scriem sistemul } \begin{cases} y = x^2 - x + 3 \\ y = 5x - 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - x + 3 = 5x - 2 \Rightarrow x^2 - x + 3 - 5x + 2 = 0$$

Se obține ecuația: $x^2 - 6x + 5 = 0$

$$\begin{aligned} a &= 1 & \Delta &= b^2 - 4ac \\ b &= -6 & \Delta &= (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 \\ c &= 5 & \Delta &= 36 - 20 = 16 > 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_1 = \frac{6 - 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-(-6) + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_2 = \frac{6 + 4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Calculăm acum y prin înlocuirea lui x .

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 5x_1 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 5 \cdot 1 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 5 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow S_1 : \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 5x_2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 5 \cdot 5 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 25 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow S_2 : \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 23 \end{cases}$$

Prin urmare dreapta d intersectează parabola în două puncte : $A(1;3), B(5;23)$, adică dreapta este secantă parabolei.

Exercițiu propus spre rezolvare:

2. Să se precizeze poziția dreptei $d : y = x - 1$ și parabola de ecuație: $y = x^2 - 2x + 1$

Exercițiu rezolvat:

3. Să se precizeze poziția dreptei $d : y = x + 1$ și parabola de ecuație: $y = x^2 - x + 2$.

Rezolvare:

$$\text{Scriem sistemul } \begin{cases} y = x^2 - x + 2 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - x + 2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x + 2 - x - 1 = 0$$

Se obține ecuația: $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$\begin{aligned} a &= 1 & \Delta &= b^2 - 4ac \\ b &= -2 & \Delta &= (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \\ c &= 1 & \Delta &= 4 - 4 = 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 = x_2 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{0}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_1 = \frac{2 - 0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{0}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_2 = \frac{2 + 0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{Sau } x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Calculăm acum y prin înlocuirea lui x .

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = x_1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow S_1 : \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = x_2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow S_2 : \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases} \text{ deci } S_1 = S_2$$

Prin urmare dreapta d intersectează parabola într-un singur punct: $A(1; 2)$, adică dreapta este tangentă parabolei.

Exercițiu propus spre rezolvare:

4. Să se precizeze poziția dreptei $d : y = x - 2$ și parabola de ecuație: $y = x^2 - 9x + 23$

Exercițiu rezolvat:

5. Să se precizeze poziția dreptei $d : y = x - 3$ și parabola de ecuație: $y = x^2 - x + 2$.

Rezolvare:

$$\text{Scriem sistemul } \begin{cases} y = x^2 - x + 2 \\ y = x - 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - x + 2 = x - 3 \Rightarrow x^2 - x + 2 - x + 3 = 0$$

Se obține ecuația: $x^2 - 2x + 5 = 0$

$$\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{array} \left| \begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 \\ \Delta = 4 - 20 = -16 < 0 \end{array} \right. \Rightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$$

Înseamnă că sistemul nu are soluție, adică $S = \Phi$

Prin urmare dreapta d nu intersectează parabola, deci dreapta este exterioară parabolei.

Exercițiu propus spre rezolvare:

6. Să se precizeze poziția dreptei $d : y = -2x + 3$ și parabola de ecuație: $y = x^2 - 4x + 9$

Exerciții

I. Să se rezolve sistemele de ecuații și să se interpreteze geometric rezultatele:

$$1. \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 - 2x + 3 \end{cases}; \quad 2. \begin{cases} y - x = 1 \\ y = x^2 - 3x + 5 \end{cases}; \quad 3. \begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 8 \end{cases};$$

$$4. \begin{cases} y = x - 2 \\ y = x^2 + x + 1 \end{cases}; \quad 5. \begin{cases} y - 2x = 0 \\ y = x^2 + x + 3 \end{cases}; \quad 6. \begin{cases} y - x + 2 = 0 \\ y = x^2 + x + 3 \end{cases}.$$

II. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât parabola de ecuație $y = mx^2 - 5x + 2$ și dreapta de ecuație $y = 5x + 1$

a) să nu se intersecteze; b) să fie tangent; c) să se intersecteze în două puncte